

66

中華民國八十八年七月三十一日

## 中文摘要

由於理論上混合機率分布之累積機率呈反曲或S型，且水文資料常因其長度不足或資料特性之關係，點繪於機率紙上亦常呈現反曲或S型，此時，吾人易將資料判定為滿足某一特性之混合機率分布。因此，若一資料點繪於機率紙上呈現反曲或是S型時，資料是否滿足某一特定之機率分布或混合機率分布為本研究探討之主題。故，本研究以統計特性已知之合成資料，探討當資料以混合機率分布及傳統上常用之單一機率分布(NOR、LN2、EV1及PT3)分別擬合後，其推估值與理論值以及推估值與樣本本身兩者間之差異，並針對不同樣本大小進行分析，以了解混合機率分布之適用性。

研究結果顯示，由於資料的特性與樣本數過小，其常易被判定為混合機率分布，其中，又以資料為極端值I型分布及皮爾遜III型分布時，造成資料誤判為混合機率分布的比例較高。

## 英文摘要

The theoretical cumulative probability of the mixture distributions shows reverse curvatures. For the real hydrological data, however, due to the small sample size and the characteristics of data, data that draw on the probability paper often shows the reverse curvatures. By this time, it tends to identify it to mixture distributions. Consequently, when the data shows reverse curvatures on probability paper, would it satisfy a single probability distribution or mixture distributions is the major objection of this study. First of all, the synthetic data which is statistical property is known is fitted by mixture probability distribution (NOR, LN) and single probability distribution (NOR, LN2, EVI and PT3) to yield estimated values separately. The difference between the comparison of estimated value and theoretical value and the comparison of estimated value and sample itself has been discussed with the different sample sizes to examine the aptness of the mixture distributions.

From this research result, the hydrology data inclined to be misidentified as a mixture distribution because of property of the data and its small sample. However, most of the cases are belonged to Type I extreme distribution or Pearson type III distribution.

Key word: Frequency Analysis; Mixture Distributions

## 謝 誌

本研究承蒙 行政院國家科學委員會之經費補助，得以順利完成，特此致謝。又，淡江大學水資源及環境工程學系研究助理章翔萍之幫助、研究生黃杏敏之文稿整理，使本計畫得以順利進行，謹此一並致謝。

# 目 錄

	頁 次
中文摘要 .....	I
英文摘要 .....	II
謝 誌 .....	III
目 錄 .....	IV
表 目 錄 .....	VI
圖 目 錄 .....	VII
第一章 緒論 .....	1
1.1 研究動機 .....	1
1.2 前人研究 .....	1
1.3 現象探討 .....	2
1.4 本研究架構 .....	2
第二章 理論基礎 .....	4
2.1 研究方法 .....	4
2.2 混合機率分布及其參數推估 .....	6
2.2.1 雙常態分布 .....	6
2.3 其他幾種常用機率分布及其參數推估 .....	8
2.3.1 常態分布 .....	8
2.3.2 二參數對數常態分布 .....	9
2.3.3 極端值（最大）I 型分布 .....	9
2.3.4 皮爾遜III型分布 .....	10
2.4 各種機率分布之反轉換值推衍 .....	10
2.4.1 雙常態分布 .....	10
2.4.2 常態分布 .....	11
2.4.3 對數常態分布 .....	11
2.4.4 極端值（最大）I 型分布 .....	12
2.4.5 皮爾遜III型分布 .....	12
2.5 選用之點繪法 .....	12

2.6 機率分布的判斷準則.....	13
2.7 混合機率分布群數的判斷準則.....	13
2.8 合成資料產生方法.....	15
第三章 本研究所採用之資料.....	16
3.1 合成資料.....	16
第四章 結果與討論 .....	17
4.1 合成資料部份.....	17
4.1.1 分布判斷準則之決定.....	17
4.1.2 混合機率分布群數的判斷準則.....	17
4.1.3 混合機率分布於各傳統單一分布下之使用情形.....	18
第五章 結論與建議 .....	22
5.1 結論.....	22
5.2 建議.....	22
參考文獻 .....	23

## 表目錄

	頁次
表1 決策分析表.....	6
表2 合成資料之基本統計特性表.....	25
表3 各種分布判斷準則之判斷正確組數.....	26
表4 混合機率分布群數判斷表.....	27
表5 三種決定資料群數判斷準則之分析結果（資料為常態分布）.....	28
表6 常態分布不同樣本下100組資料分布決策結果.....	29
表7 對數常態分布不同樣本下100組資料分布決策結果.....	30
表8 極端值 I 型分布不同樣本下100組資料分布決策結果.....	31
表9 皮爾遜 III 型分布不同樣本下100組資料分布決策結果.....	32

## 圖目錄

	頁次
圖 1 混合常態分布繪於常態機率紙( $\mu_1 \neq \mu_2, \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ) .....	33
圖 2 混合常態分布繪於常態機率紙( $\mu_1 = \mu_2, \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ) .....	33
圖 3 混合常態分布繪於常態機率紙( $\mu_1 \neq \mu_2, \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ) .....	34
圖 4 常態分布資料樣本大小由 30 至 100 分別點繪於常態機率紙之變化圖 ..	35
圖 5 極端值 I 型分布資料點繪於甘保機率紙 .....	36
圖 6 極端值 I 型分布資料點繪於常態機率紙 .....	36
圖 7 皮爾遜 III 型分布資料點繪於常態機率紙 .....	37
圖 8 皮爾遜 III 型分布資料點繪於對數常態機率紙 .....	37
圖 9 皮爾遜 III 型分布資料點繪於甘保機率紙 .....	37
圖 10 分析合成資料之流程圖 (以常態分布為例) .....	38
圖 11 以常態分布為例之 MSEt 及 MSEt1 演算流程圖 .....	39
圖 12 以常態分布為例之 MSEd 及 MSEd1 演算流程圖 .....	40
圖 13 參數推估之流程圖(以 case1 為例) .....	41
圖 14 MSEt/MSEt1、MSEd/MSEd1 分佈圖(理論分布:常態分布, case1).....	42
圖 15 MSEt/MSEt1、MSEd/MSEd1 分佈圖(理論分布:常態分布, case2).....	43
圖 16 MSEt/MSEt1、MSEd/MSEd1 分佈圖(理論分布:常態分布, case3).....	44
圖 17 常態分布資料分別以混合機率分布(case1、case2、case3)及常態分布 擬合後與理論值及樣本相較之 100 組 MSE 平均值 .....	45
圖 18 MSEt/MSEt1、MSEd/MSEd1 分佈圖(理論分布:對數常態分布, case1) ....	46
圖 19 MSEt/MSEt1、MSEd/MSEd1 分佈圖(理論分布:對數常態分布, case2) ....	47
圖 20 MSEt/MSEt1、MSEd/MSEd1 分佈圖(理論分布:對數常態分布, case3) ....	48
圖 21 對數常態分布資料分別以混合機率分布(case1、case2、case3)及對數 常態分布擬合後與理論值及樣本相較之 100 組 MSE 平均值 .....	49
圖 22 MSEt/MSEt1、MSEd/MSEd1 分佈圖(理論分布:極端值 I 型分布, case1) ..	50
圖 23 MSEt/MSEt1、MSEd/MSEd1 分佈圖(理論分布:極端值 I 型分布, case2) ..	51
圖 24 MSEt/MSEt1、MSEd/MSEd1 分佈圖(理論分布:極端值 I 型分布, case3) ..	52
圖 25 極端值 I 型分布資料分別以混合機率分布(case1、case2、case3)及極 端值 I 型分布擬合後與理論值及樣本相較之 100 組 MSE 平均值 .....	53
圖 26 MSEt/MSEt1、MSEd/MSEd1 分佈圖(理論分布:皮爾遜 III 型分布, case1) ..	54
圖 27 MSEt/MSEt1、MSEd/MSEd1 分佈圖(理論分布:皮爾遜 III 型分布, case2) ..	55



- 圖 28  $MSE_t/MSE_{t1}$ 、 $MSE_d/MSE_{d1}$  分佈圖(理論分布：皮爾遜Ⅲ型分布，case3) .. 56
- 圖 29 皮爾遜Ⅲ型分布資料分別以混合機率分布(case1、case2、case3)及皮爾遜Ⅲ型分布擬合後與理論值及樣本相較之 100 組 MSE 平均值 ..... 57

# 第一章 緒論

## 1.1 研究動機

機率分布為水文統計分析的基本依據，若採用之機率分布不適當，則根據此機率分布所作之分析其可信度降低。許多水文資料常因為在機率紙上呈現反曲或S型，造成了機率分布的判定不易，因此有了混合機率分布的引進。

傳統上，水文頻率分析多採用單一的機率分布，如常態分布、對數常態分布、極端值 I 型分布及皮爾遜 III 型分布等，這些分布之資料在機率紙上可能因資料長度不足，或是樣本本身的特性，造成了資料在機率紙上呈現反曲或S型，影響了機率分布的判斷。因此，若因水文資料在機率紙上呈現反曲或S型，即採用混合機率分布來擬合，是否會造成混合機率分布的濫用？是本研究欲探討的現象。

## 1.2 前人研究

混合機率分布乃利用一個權重因子，連結兩個或兩個以上之母體，隨著其不同的參數組合狀況，可模擬資料於機率紙上呈現反曲或S型的情況，當混合機率分布以兩個母體連結的情形時，也稱為雙分布(Two - Distribution)，以雙常態分布、雙對數常態分布及雙指數分布較常使用。

Singh等人(1972)最早將混合機率分布應用於水文統計分析，採用雙對數常態分布於洪水頻率分析，且於1974年使用同樣的概念應用於河川月流量資料分析；Rossi等人(1984)採用雙極端值分布於洪水頻率分析，模擬義大

利流域的年洪峰流量；國內以林和涂（1988）最早使用雙對數常態分布模擬濁水溪流域之桶頭站及集集站的月流量資料。

### 1.3 現象探討

造成資料在機率紙上呈現反曲或S型的情形很多，根據研究發現可能有下列幾種原因：

- (1)當資料屬於混合機率分布時，依其不同的參數組合情形，會造成不同的反曲或S型的情形，如圖1至圖3。
- (2)資料長度不足，造成其所屬之分布特性尚不明顯，如常態分布之資料，隨著資料長度的增加，資料點繪於機率紙上的變化情形，如圖4所示，由彎曲逐漸呈現直線。
- (3)資料點繪於不正確的機率紙上，如將極端值 I 型分布的資料分別點繪於常態機率紙及甘保機率紙等，見圖5至圖6，資料在常態機率紙上呈現反曲或S型較嚴重。
- (4)資料沒有適合的機率紙，如皮爾遜Ⅲ型分布的資料分別點繪於常態機率紙、對數常態機率紙及甘保機率紙等，見圖7至圖9。

### 1.4 本研究架構

為了解因資料在機率紙上呈現反曲或S型時，即以混合機率分布擬合，可能造成機率分布誤判，因此本研究以統計特性已知之合成資料，探討當資料以混合機率分布及傳統上常用之單一機率分布分別擬合後，其推估值與理論值以及推估值與樣本本身兩者間之差異。並針對不同樣本大小進行分析，探

討資料在機率紙上呈現反曲或S型是否受到資料長度的影響，及其造成誤用的情形，以了解混合機率分布之適用性。

本研究之大綱如下：第一章為緒論，第二章為理論基礎，第三章為本研究所採用之資料，第四章為結果與討論，第五章為結論。

## 第二章 理論基礎

本研究利用合成資料統計特性已知，探討當資料分別採用混合機率分布及理論機率分布擬合時，推估值與資料本身及理論值間之差異，以了解混合機率分布之適用性。關於本研究之研究方法、混合機率分布、幾種常用之機率分布、各種分布之參數推估、各種分布之反轉換值推衍、機率分布的判斷準則、選用之點繪法以及各種分布之合成資料產生方法，將分別於下列各節依次論述之。

### 2.1 研究方法

為探討資料在機率紙上呈現反曲或S型時，即採用混合機率分布（MIX）來擬合，是否易造成混合機率分布之過度使用，本研究以常態分布（NOR）、二參數對數常態分布（LN2）、極端值 I 型分布（EV1）以及皮爾遜 III 型分布（PT3）分別產生合成資料，以了解混合機率分布應用於資料為單一機率分布時之特性。

以合成資料所屬理論分布及其參數已知之特性，分別擬合所屬之理論分布及混合機率分布，利用擬合樣本後求出之參數，反求得分別擬合理論機率分布及混合機率分布之推估值，使用均方誤差（MSE）、平均絕對誤差百分比（MAPE）、UI 係數（UI）以及 U 係數（U）為判斷準則，分別比較其推估值與理論值的差異，以及推估值與樣本的差異。以判斷準則 MSE 分類：

MSE<sub>t</sub>：表示資料擬合單一機率分布後之推估值與理論值之 MSE

MSE<sub>t1</sub>：表示資料擬合混合機率分布後之推估值與理論值之 MSE

MSE<sub>d</sub>：表示資料擬合單一機率分布後之推估值與樣本值之 MSE

MSEd1：表示資料擬合混合機率分布後之推估值與樣本值之MSE

若

(1)  $MSE_t < MSE_{t1}$  則表示資料以單一機率分布擬合較接近理論值

(2)  $MSE_t > MSE_{t1}$  則表示資料以混合機率分布擬合較接近理論值

(3)  $MSE_d < MSE_{d1}$  則表示資料以單一機率分布擬合較接近樣本值

(4)  $MSE_d > MSE_{d1}$  則表示資料以混合機率分布擬合較接近樣本值

當情況(1)及情況(4)同時發生的比例高時，則發生機率分布誤判為混合機率分布的比例高；當情況(2)及情況(3)同時發生的比例高時，雖然亦是發生機率分布誤判，但是嚴重程度較為輕微，因為資料本來即屬於單一分布，只是若能採用混合機率分布為更佳，其餘三種判斷模式的準則MAPE、U、UI之方式亦同。

各別擬合單一機率分布及混合機率分布所得之推估值與樣本比較的差異乃在模擬實際水文量發生的狀況，而其各別的推估值與理論值比較的差異在於討論實際上真正未知的狀況。

另，為避免因資料本身不具有顯著的混合機率分布的特性而造成誤判機率分布為混合機率分布的情形，本研究以Likelihood ratio test、Akaike information criterion (AIC)及Bayesian information criterion (BIC)等三種混合機率分布群數判斷準則探討混合機率分布群數判斷之必要性。

表1為本研究於合成資料時之決策分析表，誤判(1)為決定採用混合機率分布，但發生決策錯誤的情況，誤判(2)為決定採用單一機率分布，卻發生決策錯誤的情況。發生誤判(1)較發生誤判(2)更為嚴重，因為誤判(2)是在混合機率分布較適用的情況下，採用單一機率分布，然而，資料本身屬於單一機率分布，本採用單一機率分布模擬即可，但若能採用混合機率分布會更佳，因此發生誤判(2)其嚴重程度較誤判(1)小。圖10為說明本研究分析合成資料

之流程圖，圖11及圖12計算為MSEt、MSEt1、MSEd及MSEd1之流程圖。

表1 決策分析表

	理論上以單一分布擬合較佳 (MSEt<MSEt1)	理論上以混合分布擬合較佳 (MSEt>MSEt1)	
實際上決定採用單一分布擬合	正確判斷(1)	誤判(2)	正確判斷(1) +誤判(2)
實際上決定採用混合分布擬合	誤判(1)	正確判斷(2)	正確判斷(2) +誤判(1)
	正確判斷(1) +誤判(1)	正確判斷(2) +誤判(2)	

## 2.2 混合機率分布及其參數推估

混合機率分布乃利用權重因子聯合兩個以上參數不同的機率分布，因此具有多種組合。本研究中所探討之混合機率分布為雙常態分布。

### 2.2.1 雙常態分布

雙常態分布之機率密度函數如式(2.2.1)所示：

$$f(x) = pf_1(x) + (1-p)f_2(x) \quad (2.2.1)$$

$$\text{其中 } f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

$$f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

$x$  : 隨機變數

$p$  : 混合權重因子

混合常態分布之參數推估的方式有很多，本研究中採用Dempster(1977)極大化期望值演算法(expectation-maximization algorithm，簡稱EM方法)來計算最大概似估計值。假設已知  $x_i, i=1,2,\dots,n$ ，雙常態分布參數  $p$ 、 $\mu_1$ 、 $\mu_2$ 、 $\sigma_1$  及  $\sigma_2$  之推估本研究採用Aitkin(1980)之疊代法，計算流程如圖13所示(以case1為例);並依照雙常態分布為下列三種狀況時，推估式略有不同，分別說明如下：

(1)當  $\mu_1 \neq \mu_2, \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$  時 (以下簡稱case1)

其  $m (=4)$  個參數  $p$ 、 $\mu_1$ 、 $\mu_2$  及  $\sigma^2$  之推估式如下：

$$\hat{p} = \sum_i \hat{a}(1|x_i) / n \quad (2.2.1a1)$$

$$\hat{\mu}_j = \sum_i x_i \hat{a}(j|x_i) / \sum_i \hat{a}(j|x_i) \quad j=1,2 \quad (2.2.1a2)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_j \sum_i \left\{ (x_i - \hat{\mu}_j)^2 \hat{a}(j|x_i) \right\} / n \quad (2.2.1a3)$$

其中， $n$  : 樣本個數

$\hat{a}(j|x_i)$  : 資料  $x_i$  屬於第  $j$  群機率分布之機率

(2)當  $\mu_1 = \mu_2, \sigma_1^2 = k\sigma_2^2 \neq \sigma_2^2$  時 (以下簡稱case2)

其  $m (=4)$  個參數  $p$ 、 $\mu$ 、 $\sigma_1^2$  及  $\sigma_2^2$  之推估式如下：



$$\hat{p} = \sum_i \hat{a}(1|x_i) / n \quad (2.2.1b1)$$

$$\hat{\mu}_j = \sum_i w_i x_i / \sum_i w_i \quad (2.2.1b2)$$

$$\hat{\sigma}_1^2 = \sum_j \sum_i (x_i - \hat{\mu}_j)^2 w_i / n \quad (2.2.1b3)$$

$$\hat{k} = \sum_i e_i^2 \hat{a}(2|x_i) / \sum_i \hat{a}(2|x_i) \quad (2.2.1b4)$$

其中， $w_i = \hat{a}(1|x_i) + \hat{a}(2|x_i) / \hat{k}$

$$e_i = (y_i - \hat{\mu})^2 / \hat{\sigma}_1$$

(3) 當  $\mu_1 \neq \mu_2$ ,  $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$  時 (以下簡稱case3)

其 m (=5) 個參數  $p$ 、 $\mu_1$ 、 $\mu_2$ 、 $\sigma_1^2$  及  $\sigma_2^2$  之推估式如下:

$$\hat{p} = \sum_i \hat{a}(1|x_i) / n \quad (2.2.1c1)$$

$$\hat{\mu}_j = \sum_i x_i \hat{a}(j|x_i) / \sum_i \hat{a}(j|x_i) \quad j=1,2 \quad (2.2.1c2)$$

$$\hat{\sigma}_j^2 = \sum_i \{(x_i - \hat{\mu}_j)^2 \hat{a}(j|x_i)\} / \sum_i \hat{a}(j|x_i) \quad j=1,2 \quad (2.2.1c3)$$

## 2.3 其他幾種常用機率分布及其參數推估

本研究共計採用常態分布、二參數對數常態分布、極端值 I 型分布及皮爾遜 III 型分布，其中二參數對數常態分布之參數推估時資料不經轉換、皮爾遜 III 型分布之參數推估時偏態係數須經修正，以下則分別介紹之。

### 2.3.1 常態分布

常態分布之機率密度函數如式(2.3.1)所示：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{(x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right) \quad (2.3.1)$$

其中  $\mu_x$  及  $\sigma_x^2$  兩參數之推估值  $\bar{x}$  及  $\hat{\sigma}_x^2$  如式(2.3.1a)、(2.3.1b)所示：

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i / n \quad (2.3.1a)$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / n \quad (2.3.1b)$$

### 2.3.2 二參數對數常態分布

二參數對數常態分布之機率密度函數如式(2.3.2)所示：

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right) \quad (2.3.2)$$

其中， $\mu_y$  及  $\sigma_y^2$  兩參數之推估值  $\bar{\mu}_y$  及  $\hat{\sigma}_y^2$  採用資料不須轉換的方式求得，如式(2.3.2a)、(2.3.2b)所示：

$$\bar{\mu}_y = \ln(\bar{x}) - 0.5 \ln[(\hat{\sigma}_x^2 / \bar{x})^2 + 1] \quad (2.3.2a)$$

$$\hat{\sigma}_y^2 = \ln[(\hat{\sigma}_x^2 / \bar{x})^2 + 1] \quad (2.3.2b)$$

### 2.3.3 極端值（最大）I 型分布

極端值 I（最大）型分布之機率密度函數如式(2.3.3)所示：

$$f(x) = \alpha \exp\{-\alpha(x - \beta) - \exp(-\alpha(x - \beta))\} \quad (2.3.3)$$

其中， $\alpha$  與  $\beta$  兩參數之推估值  $\hat{\alpha}$  與  $\hat{\beta}$  如式(2.3.3a)、(2.3.3b)所示：

$$\hat{\alpha} = 1.2825 / \hat{\sigma}_x \quad (2.3.3a)$$

$$\hat{\beta} = \bar{x} - 0.45 \hat{\sigma}_x \quad (2.3.3b)$$

### 2.3.4 皮爾遜Ⅲ型分布

皮爾遜Ⅲ型分布之機率密度函數如式(2.3.4)所示：

$$f(x) = \frac{1}{\alpha \Gamma(\beta)} \left( \frac{x - \theta}{\alpha} \right)^{\beta-1} \exp \left( - \frac{(x - \theta)}{\alpha} \right) \quad (2.3.4)$$

其中， $\beta$ 、 $\alpha$ 與 $\theta$ 三參數之推估值 $\hat{\beta}$ 、 $\hat{\alpha}$ 與 $\hat{\theta}$ 如式(2.3.4a)、(2.3.4b)及(2.3.4c)所示：

$$\hat{\beta} = (2 / \hat{C}_{sx})^2 \quad (2.3.4a)$$

$$\hat{\alpha} = \hat{\sigma}_x / \hat{\beta}^{0.5} \quad (2.3.4b)$$

$$\hat{\theta} = \bar{x} - \hat{\sigma}_x \hat{\beta}^{0.5} \quad (2.3.4c)$$

又，本研究中採用偏態係數須經修正，修正式如(2.3.4d)：

$$C'_{sx} = C_{sx} \frac{[n(n-1)]^{0.5}}{(n-2)} (1 + 8.5 / n) \quad (2.3.4d)$$

再將 $C'_{sx}$ 之修正值代入式(2.3.4a)、(2.3.4b)及(2.3.4c)求出 $\alpha$ 、 $\beta$ 與 $\theta$ 之推估值。

## 2.4 各種機率分布之反轉換值推衍

### 2.4.1 雙常態分布

雙常態分布的反函數值較為複雜，根據下列步驟說明如下：

1. 分別依照不同狀況求出其參數  $\hat{\mu}_1$ 、 $\hat{\mu}_2$ 、 $\hat{\sigma}_1^2$ 、 $\hat{\sigma}_2^2$  及  $\hat{P}$  以及資料本身之  $\bar{x}$ 、 $\hat{\sigma}$ 。
2. 以資料之  $B = \bar{x} + 4\hat{\sigma}$  為起始值，分別計算  $Z_j = \frac{B - \hat{\mu}_j}{\hat{\sigma}_j}$ ， $j=1, 2$ 。
3. 將  $Z_1$ 、 $Z_2$  經反轉換求得對應之標準常態分布之累積機率  $a_1$  及  $a_2$ 。
4. 計算於  $B$  點之雙常態分布的累積機率值  $P' = \hat{P}a_1 + (1 - P)a_2$ 。
5. 若  $|P' - (1 - P_i)| < \varepsilon$  則  $x_i = B$  ( $P_i$  表示所欲推求之反函數值所對應之超越機率，根據虞氏點繪法求得)。
6. 若  $|P' - (1 - P_i)| > \varepsilon$ ，則  $B = B - \varepsilon l$ ，重回第2步驟直到  $|P' - (1 - P_i)| < \varepsilon$  (本研究  $\varepsilon$  值採用 0.00003， $\varepsilon l$  值視情況改變)。

## 2.4.2 常態分布

常態分布的反函數值根據下列步驟說明如下：

1. 計算常態分布參數之  $\bar{x}$ 、 $\hat{\sigma}_x$ 。
2. 計算  $P'_i = 1 - P_i$  所對應於標準常態分布之反函數值  $Z_i$ 。
3. 計算  $\hat{x}_i = \bar{x} + \hat{\sigma}_x Z_i$ 。

## 2.4.3 對數常態分布

對數常態分布的反函數值根據下列步驟說明如下：

1. 計算資料之  $\bar{x}$ 、 $\hat{\sigma}_x$  及  $\hat{C}_v = \hat{\sigma}_x / \bar{x}$ 。
2. 計算  $P'_i = 1 - P_i$  所對應於標準常態分布之反函數值  $Z_i$ 。

$$3. \text{ 計算 } K_i = \frac{\exp[(\ln(1 + \hat{C}_v^2))^{0.5} Z_i - \ln(1 + \hat{C}_v^2) / 2] - 1}{\hat{C}_v}。$$

$$4. \text{ 計算 } \hat{x}_i = \bar{x} + \hat{\sigma}_x K_i。$$

## 2.4.4 極端值（最大）I 型分布

極端值（最大）I 型分布的反函數值根據下列步驟說明如下：

1. 計算極端值（最大）I 型分布之參數  $\hat{\alpha}$ 、 $\hat{\beta}$ 。
2. 計算  $P'_i = 1 - P_i$ 。
3. 計算  $\hat{x}_i = (-\ln(-\ln P'_i)) / \hat{\alpha} + \hat{\beta}$ 。

## 2.4.5 皮爾遜III型分布

皮爾遜III型分布的反函數值根據下列步驟說明如下：

1. 計算皮爾遜III型分布之參數  $\hat{\alpha}$ 、 $\hat{\beta}$  及  $\hat{\theta}$ 。
2. 計算  $P'_i = 1 - P_i$  所對應於標準常態分布之反函數值  $Z_i$ 。
3. 計算  $\hat{x}_i = \hat{\theta} + \hat{\alpha}\hat{\beta} \left[ 1 - \frac{1}{9\hat{\beta}} + \left( \frac{1}{9\hat{\beta}} \right)^{0.5} Z_i \right]^3$ 。

## 2.5 選用之點繪法

本研究採用虞和黃（1992）利用隨機變數順序統計量之中位數所推求無關機率分布點繪法公式（Distribution Free Plotting Position）：

$$P_i = \frac{i - 0.326}{n + 0.348} \quad (2.5.1)$$

其中， $i$ ：水文資料的大小順序（ $i=1$ 時為最大）

$n$ ：水文資料個數

用以推求各資料點  $x_i$  之對應的累積機率，並反求出各理論分布所對應之理論值  $x_{Ti}$ ，及各模擬分布所對應的推估值  $\hat{x}_{Ti}$ 。

## 2.6 機率分布的判斷準則

以下列四種判斷準則來判定：

$$MSE = \frac{1}{n} \sum (\hat{x}_i - x_i)^2$$

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum \left| \frac{\hat{x}_i - x_i}{x_i} \right|$$

$$U = \frac{[\sum (\hat{x}_i - x_i)^2 / n]^{0.5}}{[\frac{1}{n} \sum \hat{x}_i^2]^{0.5} + [\frac{1}{n} \sum x_i^2]^{0.5}}$$

$$UI = \left[ \frac{\sum (\hat{x}_i - x_i)^2}{\sum x_i^2} \right]^{0.5}$$

$x_i$ ：第 $i$ 個理論分布之理論值

$\hat{x}_i$ ：第 $i$ 個擬合機率分布之推估值

## 2.7 混合機率分布群數的判斷準則

(1) Likelihood ratio test

檢定方法如下：

$H_0: g = g_1 = 1$       表示資料為單一機率分布

$H_1: g = g_2 = 2$       表示資料為混合機率分布

$$-2\text{clog } \lambda \sim \chi_d^2$$

其中，  $-2\log \lambda = -2[L(g_1) - L(g_2)]$

$$L(g_k) = \sum_{i=1}^n \ln \left[ \sum_{j=1}^{g_k} \hat{p}_j f(x_i, \hat{a}_j) \right], \quad g_k \text{ 群時之概似函數值, } k=1, 2$$

$\hat{p}_j$ ：第  $j$  群推估之權重因子

$\hat{a}_j$ ：第  $j$  群推估之參數

$c$ ：  $(n-1-q-\frac{1}{2}g_2)/n$

$n$ ：資料個數

$q$ ：維度

$d$ ：  $2 \times$  (扣除混合因子外之參數個數差)

## (2) Akaike information criterion (AIC)

Bozdogan 及 Sclove (1984) 提出，用於混合機率分布群數之判斷準

則：

$$AIC(g_k) = -2L(g_k) + 2\nu(g_k)$$

$$\text{其中, } L(g_k) = \sum_{i=1}^n \ln \left[ \sum_{j=1}^{g_k} \hat{p}_j f(x_i, \hat{a}_j) \right]$$

$\nu(g_k)$ ：當群數為  $g_k$  時之自由參數的個數

## (3) Bayesian information criterion (BIC)

Rissanen(1989)提出，定義如下：

$$\text{BIC}(g_k) = -2L(g_k) + \nu(g_k) \ln n$$

$$\text{其中， } L(g_k) = \sum_{i=1}^n \ln \left[ \sum_{j=1}^{g_k} \hat{p}_j f(x_i, \hat{a}_j) \right]$$

$\nu(g_k)$ ：當群數為 $g_k$ 時之自由參數的個數

$n$ ：資料個數

## 2.8 合成資料產生方法

共計產生常態分布、對數常態分布、極端值（最大）I型分布及皮爾遜III型分布等四種分布。每種分布先產生樣本個數為100的資料100組，再由此100組資料中以分布判斷準則MSE，挑選出MSE值為最小的一組。其次，由挑選出MSE最小的一組100個資料中，隨機挑選出30個資料，共計100組，再由剩餘的資料中逐次挑選10個資料，加入已被挑選的資料中，直到樣本個數為90時停止。因此，每一種分布的樣本個數由30至90，每間隔10個則有100組，共計700組，共產生4種分布。



## 第三章 本研究所採用之資料

本研究所採用的資料為合成資料，敘述如下。

### 3.1 合成資料

共計採用常態分布、對數常態分布、極端值 I 型分布以及皮爾遜 III 型分布 (PT3) 等四種，樣本大小由 30 至 90，每種樣本大小均為 100 組，其基本統計特性如表 2 所示。

## 第四章 結果與討論

### 4.1 合成資料部份

#### 4.1.1 分布判斷準則之決定

本研究共計採用MSE、MAPE、UI及U等四種分布判斷準則，由表3可知，當資料為常態分布時，分別擬合常態分布及三種狀況之混合機率分布，以MSE、UI及U等三種判斷準則所得結果較為一致，其中又以MSE及UI得到完全一致的判斷結果，且MSE又為資料與推估值間之直接差異，而MAPE或U易受到資料或推估值的影響，因此本研究採用MSE為以下各項研究分布判斷的準則。

#### 4.1.2 混合機率分布群數的判斷準則

##### 1. 混合機率分布群數判斷準則的必要性

如表4所示，若不考慮群數判斷準則時，僅以MSE判斷資料是否為混合分布時，可知採用混合機率分布的組數均非常高（即 $MSE_d > MSE_{d1}$ 的組數），然而在決定採用混合機率分布的情況下，其發生判斷錯誤的組數亦很高（即為表中括弧內之組數，為 $MSE_t < MSE_{t1}$ 的組數），因此，為減少資料本身並不具有混合機率分布的特性，卻採用混合機率分布為最佳分布而造成機率分布的誤判，混合機率分布群數的判斷有其必要性。

##### 2. 混合機率分布群數判斷準則的選擇

本研究共計採用Likelihood ratio test、AIC、BIC等三種混合機率分布群數的判斷準則，如表5之分析結果來看，當已知資料屬於單一的常態分布時，判斷準則AIC均較容易將資料判斷為混合的常態分布，而判斷準則BIC將

資料判斷為混合的常態分布的比例為略低，為避免因高估混合機率分布的群數或低估混合機率分布的群數，造成機率分布的誤判，因此本研究採用Likelihood ratio test為混合機率分布群數之判斷準則。

#### 4.1.3 混合機率分布於各傳統單一分布下之使用情形

根據虞（1990）之研究結果顯示，於台灣地區年一日、二日及三日最大暴雨量資料以皮爾遜Ⅲ型分布模擬較適合，因此本研究除考慮幾種常用機率紙之理論分布以外（常態分布、對數常態分布及極端值Ⅰ型分布），並針對皮爾遜Ⅲ型分布加以探討，結果分述如下。

##### 1. 常態分布

資料分別以常態分布與混合常態分布(case1:  $\mu_1 \neq \mu_2, \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ; case2:  $\mu_1 = \mu_2, \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ; case3:  $\mu_1 \neq \mu_2, \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ) 擬合，樣本數為30、50、70、90時之100組資料的MSEt/MSEt1及MSEd/MSEd1之分佈狀況，如圖14至圖16所示；資料分別以常態分布與混合常態分布(case1、case2、case3) 擬合，100組平均之MSEt、MSEt1、MSEd、MSEd1之變化圖，如圖17所示。當資料以常態分布及混合常態分布(case1、case2、case3) 分別擬合時，與理論值相較之MSE均顯示出資料以常態分布擬合時，優於以混合常態分布擬合；於case1、case3兩種狀況時，與樣本值相較之MSE顯示資料以混合常態分布擬合時較常態分布接近樣本值，而於case2之狀況，則以擬合常態分布較接近樣本值，但差異不大。

如表6所示，當資料為常態分布時，於case2、case3發生誤判(1)的組數為0，於case1時，若資料個數大於60以上，發生誤判(1)的組數逐漸降低；於case2時發生誤判(2)的組數約有30-40組，然而，發生誤判(2)其嚴重程度較誤判(1)輕微，因為雖然資料應以混合分布擬合較佳，但資料本身屬於常態

分布，所以採用常態分布亦屬合理，但，若能採用混合機率分布則會更佳。

## 2. 對數常態分布

資料分別以對數常態分布與混合常態分布 (case1、case2、case3) 擬合，樣本數為30、50、70、90時之100組資料的MSEt/MSEt1及MSEd/MSEd1之分佈狀況，如圖18至圖20所示；資料以對數常態分布與混合常態分布 (case1、case2、case3) 分別擬合，100組平均之MSEt、MSEt1、MSEd、MSEd1之變化圖如圖21所示。當資料分別以對數常態分布及混合常態分布 (case1、case2、case3) 擬合時，與理論值相較之MSE顯示出資料以對數常態分布擬合時，優於以混合常態分布擬合；於case1、case3兩種狀況時，與樣本值相較之MSE顯示資料以混合常態分布擬合時較對數常態分布接近樣本值，於case2之狀況，以擬合對數常態分布較接近樣本值。

由表7顯示當資料為對數常態分布時，於case2發生誤判(1)的組數為0，於case1時，發生誤判(1)的組數較多；於case1、case3均有誤判(2)的發生。

## 3. 極端值 I 型分布

資料分別以極端值 I 型分布與混合常態分布 (case1、case2、case3) 擬合，樣本數為30、50、70、90時之100組資料的MSEt/MSEt1及MSEd/MSEd1之分佈狀況，如圖22至圖24所示；資料分別以極端值 I 型分布與混合常態分布 (case1、case2、case3) 擬合，100組平均之MSEt、MSEt1、MSEd、MSEd1之變化圖，如圖25所示。當資料以極端值 I 型分布及混合常態分布 (case1、case2、case3) 分別擬合時，與理論值相較之MSE顯示出資料以極端值 I 型分布擬合時，優於以混合常態分布擬合；於case3時，與樣本值相較之MSE顯示資料以混合常態分布擬合時較極端值 I 型分布接近樣本值，於case1時，當樣本個數漸增，與樣本值相較之MSE顯示資料由混合常態分布擬合較接近樣本值

改為以極端值 I 型分布接近樣本值，而於case2之狀況，均以擬合極端值 I 型分布較接近理論值或樣本值。

由表8顯示當資料為極端值 I 型分布時，於case2發生誤判(1)的組數為0，於case1、case3時，均有發生誤判(1)的組數；於三種狀況均有誤判(2)的發生。

#### 4. 皮爾遜III型分布

資料分別以皮爾遜III型分布與混合常態分布 (case1、case2、case3) 擬合，樣本數為30、50、70、90時之100組資料的MSEt/MSEt1及MSEd/MSEd1之分布狀況，如圖26至圖28所示；資料分別以皮爾遜III型分布與混合常態分布 (case1、case2、case3) 擬合，100組平均之MSEt、MSEt1、MSEd、MSEd1之變化圖，如圖29所示。當資料以皮爾遜III型分布及混合常態分布 (case1、case2、case3) 分別擬合時，與理論值相較之MSE顯示出資料以皮爾遜III型分布擬合時，優於以混合常態分布擬合；於case1、case3兩種狀況時，與樣本值相較之MSE顯示當資料漸增時，由混合常態分布擬合較接近樣本值改為較皮爾遜III型分布較接近樣本值，而於case2之狀況，均以擬合皮爾遜III型分布較接近理論值或樣本值。

由表9顯示當資料為皮爾遜III型分布時，於case2發生誤判(1)的組數為0，於case1、case3時，均有發生誤判(1)的組數，其中，case1及case3於小樣本時發生錯誤的比例高；於三種狀況均有誤判(2)的發生。

綜合上述，由合成資料可得以下幾項結果：

(1)當資料為常態分布時，發生誤判機率分布為混合機率分布的比例不高，

但多發生於小樣本。

(2)當資料為對數常態分布時，誤判機率分布為混合常態分布之情況隨著樣本數增大而降低。

- (3)當資料為極端值 I 型分布時，發生誤判機率分布為混合常態分布的比例偏高。
- (4)當資料為皮爾遜Ⅲ型分布時，且於樣本個數少時，以混合常態分布擬合發生誤判的比例偏高。

## 第五章 結論與建議

### 5.1 結論

#### 1. 合成資料

- (1) 當資料為常態分布時，發生誤判機率分布為混合機率分布的比例不高，但多發生於小樣本。
- (2) 當資料為對數常態分布時，誤判機率分布為混合常態分布之情況隨著樣本數增大而降低。
- (3) 當資料為極端值 I 型分布時，發生誤判機率分布為混合常態分布的比例偏高。
- (4) 當資料為皮爾遜 III 型分布時，且於樣本個數少時，以混合常態分布擬合發生誤判的比例偏高。

由於資料的特性與樣本數過小，其常易被判定為混合機率分布，因此，若應用於實測資料時易造成混合機率分布的濫用。

### 5.2 建議

- 1. 混合機率分布的混合方式除了混合常態分布以外，尚其他的混合方式，值得進一步的研究。

## 參考文獻

1. 林國峰、郭振泰、涂秀錦，「混合機率分布對流量適用性之研究」，第四屆水利工程研討會，p. 39-54，民國77年5月。
2. 虞國興，「台灣水文頻率分析之規範標準研究——一年一日、二日及三日最大暴雨量」，農業工程學報，第36卷，第二期，pp. 56-79，民國79年6月。
3. 虞國興、黃志強，「無關機率點繪法公式」，台灣水利，第40卷，第三期，pp. 22-33，民國81年9月。
4. Aitkin, M. and Tunnicliffe Wilson, G. (1980), "Mixture Models, Outliers and the EM Alogrithm", Technometrics, Vol.22, pp325-332.
5. Bozdogan, H. and Sclove, S. L. (1984), "Multi-Sample Cluster Analysis using Akaike's Information Criterion", Annals of Institute of statistical Mathematics, 8, pp31-44.
6. Celeux, G. and Soromenho, G. (1996), "An Entropy Criterion for Assessing the Number of Clusters in a Mixture Model", Journal of classification, 8, pp195-212.
7. Day, N. E. (1969), "Estimating the Components of a Mixture of Normal Distributions", Biometrika, Vol.56, pp463-474.
8. Dempster, A. P. Laird, N. M. and Rubin, D. B. (1977), "Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm (with Disussion)". J. Roy. Statist. Soc., B, Vol.39, pp1-38.
9. Evritt, B. S. and Hand, D. J. (1981), Finite Mixture Distributions, Chapter 2, London: Chapman and Hall.
10. Fowlkss, E. B. (1979), "Some Methods for Studying the Mixture of Two Normal (Lognormal) Distributions", Journal of the American



- Statistical Association , September, pp. 561-575.
- 11 · Kite, G. W. (1977), Frequency and Risk Analyses in Hydrology, Water Resour. Publications.
  - 12 · Leytham, K. M. (1984), "Maximum likelihood Estimates for Parameters of Mixture distributions" Water Resour. Res. V(20), N(7), pp. 896-902.
  - 13 · McLachlan, G. J. and Basford, K. E. (1988), Mixture Models, Inference and applications to Clustering, New York: Marcel Dekker.
  - 14 · Robert, V. Hogg and Allen, T. Craig (1986), Introduction to Mathematical Statistics, Chapter 7, pp. 257-266, Macmillan Publishing Co., Inc., New York.
  - 15 · Rossi, F., Fiorentino M., and Versace, P. (1984), "Two-Component Extreme Value Distribution for Flood Frequency Analysis", Water Resour. Res. V(20), N(7), pp. 847-856.
  - 16 · Singh, K. P. and Sinclair, R. A. (1972), "Two-Distribution Method for Flood-Frequency Analysis ", J. of the Hydr. Div., ASCE, 98(HY1), pp. 29-44.
  - 17 · Singh, K. P. and Lonquist, C. G. (1974), "Two-Distribution Method for Modeling and Sequential Generation of Monthly Streamflows ", Water Resour. Res. V(10), N(4), pp. 763-773.
  - 18 · Tan, W. Y. and Chang, W. C. (1972), "Some Comparisons of the Method of Moments and the Method of Maximum Likelihood in Estimating Parameters of a Mixture of Two Normal Densities", Journal of the American Statistical Association , Vol. 67, pp. 702-708.

表2 合成資料之基本統計特性表

分布	平均值	標準偏差	偏態係數	樣本數(各100組)
NOR	100	25	-----	30,40,50,60,70,80,90
LN2	100	25	-----	30,40,50,60,70,80,90
EV1	100	25	-----	30,40,50,60,70,80,90
PT3	100	25	1.5	30,40,50,60,70,80,90

表3 各種分布判斷準則之判斷正確組數

樣本 n	判斷準則			
	MSE	MAPE	U	UI
	$\mu_1 \neq \mu_2, \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (case1)			
30	98	90	98	98
40	93	86	93	93
50	95	89	95	95
60	97	96	97	97
70	100	97	100	100
80	100	96	100	100
90	100	99	100	100
n	$\mu_1 = \mu_2, \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (case2)			
30	63	73	63	63
40	59	70	60	59
50	62	75	62	62
60	64	75	64	64
70	69	83	70	69
80	62	84	64	62
90	73	95	73	73
n	$\mu_1 \neq \mu_2, \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (case3)			
30	98	91	98	98
40	94	83	94	94
50	96	89	96	96
60	99	97	99	99
70	100	97	100	100
80	100	96	100	100
90	100	99	100	100

註：1. 資料屬於常態分布，各樣本產生100組。

2. case1至case3為擬合混合常態分布。

表4 混合機率分布群數判斷表

樣本 大小 n	不考慮混合機率分布群數判斷		考慮混合機率分布群數判斷	
	採用單一 機率分布	採用混合 機率分布	採用單一 機率分布	採用混合 機率分布
30	18 (2)	82 (82)	100 (2)	0 (0)
40	18 (6)	82 (81)	99 (7)	1 (1)
50	18 (5)	82 (81)	99 (5)	1 (0)
60	20 (3)	80 (79)	99 (3)	1 (0)
70	22 (0)	78 (78)	100 (0)	0 (0)
80	22 (0)	78 (78)	100 (0)	0 (0)
90	22 (0)	78 (78)	100 (0)	0 (0)

- 註：1. 常態分布資料，分別以常態分布及混合常態 (casel) 擬合後，與資料相比，是否加入群數判斷準則之差異，其中，分布之判斷準則為MSE，群數之判斷準則採Likelihood ratio test，顯著水準為0.05。
2. 各樣本產生100組，( ) 內表示決策錯誤的的組數。

表5 三種決定資料群數判斷準則之分析結果（資料為常態分布）

擬合狀況	樣本大小 n (100組)	判斷準則		
		Likelihood ratio test	AIC	BIC
擬合混合 常態分布 $\mu_1 \neq \mu_2$ 、 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (case1)	30	0	9	0
	40	1	6	0
	50	1	2	0
	60	1	2	0
	70	0	0	0
	80	0	1	0
	90	0	0	0
擬合混合 常態分布 $\mu_1 = \mu_2$ 、 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (case2)	30	0	2	0
	40	0	0	0
	50	0	0	0
	60	0	0	0
	70	0	0	0
	80	0	0	0
	90	0	0	0
擬合混合 常態分布 $\mu_1 \neq \mu_2$ 、 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (case3)	30	0	11	1
	40	0	8	0
	50	0	6	0
	60	0	8	0
	70	0	9	0
	80	0	2	0
	90	0	0	0

表6常態分布不同樣本下100組資料分布決策結果

樣本 n	正確判斷 (1)	誤判(1)	正確判斷 (2)	誤判(2)
$\mu_1 \neq \mu_2, \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (case1)				
30	98	0	0	2
40	92	1	0	7
50	94	1	0	5
60	96	1	0	3
70	100	0	0	0
80	100	0	0	0
90	100	0	0	0
n	$\mu_1 = \mu_2, \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (case2)			
30	63	0	0	37
40	59	0	0	41
50	62	0	0	38
60	64	0	0	36
70	69	0	0	31
80	62	0	0	38
90	73	0	0	27
n	$\mu_1 \neq \mu_2, \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (case3)			
30	98	0	0	2
40	94	0	0	6
50	96	0	0	4
60	99	0	0	1
70	100	0	0	0
80	100	0	0	0
90	100	0	0	0

- 註：1. 正確判斷(1)表資料以常態分布擬合較佳，且判斷為常態分布。  
 2. 誤判(1)表資料以常態分布擬合較佳，但判斷為混合分布。  
 3. 正確判斷(2)表資料以混合分布擬合較佳，且判斷為混合分布。  
 4. 誤判(2)表資料以混合分布擬合較佳，但判斷為常態分布。

表7 對數常態分布不同樣本下100組資料分布決策結果

樣本 n	正確判斷 (1)	誤判(1)	正確判斷 (2)	誤判(2)
$\mu_1 \neq \mu_2, \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (case1)				
30	84	8	0	8
40	77	11	0	12
50	70	16	0	14
60	71	12	1	16
70	74	16	0	10
80	86	7	0	7
90	91	8	0	1
$\mu_1 = \mu_2, \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (case2)				
30	100	0	0	0
40	100	0	0	0
50	100	0	0	0
60	100	0	0	0
70	100	0	0	0
80	100	0	0	0
90	100	0	0	0
$\mu_1 \neq \mu_2, \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (case3)				
30	94	1	0	5
40	92	2	0	6
50	90	1	0	9
60	87	2	0	11
70	93	2	0	5
80	97	1	0	2
90	97	0	0	3

- 註：1. 正確判斷(1)表資料以對數常態分布擬合較佳，且判斷為對數常態分布。  
 2. 誤判(1)表資料以對數常態分布擬合較佳，但判斷為混合分布。  
 3. 正確判斷(2)表資料以混合分布擬合較佳，且判斷為混合分布。  
 4. 誤判(2)表資料以混合分布擬合較佳，但判斷為對數常態分布。

表8 極端值 I 型分布不同樣本下100組資料分布決策結果

樣本 n	正確判斷(1)	誤判(1)	正確判斷(2)	誤判(2)
$\mu_1 \neq \mu_2, \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (case1)				
30	45	44	0	11
40	35	59	2	4
50	39	60	1	0
60	44	56	0	0
70	64	36	0	0
80	66	34	0	0
90	86	14	0	0
$\mu_1 = \mu_2, \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (case2)				
30	97	0	0	3
40	100	0	0	0
50	100	0	0	0
60	100	0	0	0
70	100	0	0	0
80	100	0	0	0
90	100	0	0	0
$\mu_1 \neq \mu_2, \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (case3)				
30	72	23	0	5
40	55	42	0	3
50	43	56	0	1
60	35	65	0	0
70	33	67	0	0
80	25	75	0	0
90	22	78	0	0

- 註：1. 正確判斷(1)表資料以極端值 I 型分布擬合較佳，且判斷為極端值 I 型分布。  
 2. 誤判(1)表資料以極端值 I 型分布擬合較佳，但判斷為混合分布。  
 3. 正確判斷(2)表資料以混合分布擬合較佳，且判斷為混合分布。  
 4. 誤判(2)表資料以混合分布擬合較佳，但判斷為極端值 I 型分布。



表9 皮爾遜Ⅲ型分布不同樣本下100組資料分布決策結果

樣本 n	正確判斷 (1)	誤判(1)	正確判斷 (2)	誤判(2)
$\mu_1 \neq \mu_2, \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (case1)				
30	46	42	8	4
40	49	47	0	4
50	65	30	1	4
60	80	20	0	0
70	86	14	0	0
80	98	2	0	0
90	100	0	0	0
n	$\mu_1 = \mu_2, \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (case2)			
30	98	0	0	2
40	100	0	0	0
50	100	0	0	0
60	100	0	0	0
70	100	0	0	0
80	100	0	0	0
90	100	0	0	0
n	$\mu_1 \neq \mu_2, \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (case3)			
30	60	26	4	10
40	36	56	2	6
50	30	58	2	10
60	45	51	0	4
70	60	38	0	2
80	70	30	0	0
90	86	14	0	0

註：1. 正確判斷(1)表資料以皮爾遜Ⅲ型分布擬合較佳，且判斷為皮爾遜Ⅲ型分布。

2. 誤判(1)表資料以皮爾遜Ⅲ型分布擬合較佳，但判斷為混合分布。

3. 正確判斷(2)表資料以混合分布擬合較佳，且判斷為混合分布。

4. 誤判(2)表資料以混合分布擬合較佳，但判斷為皮爾遜Ⅲ型分布。

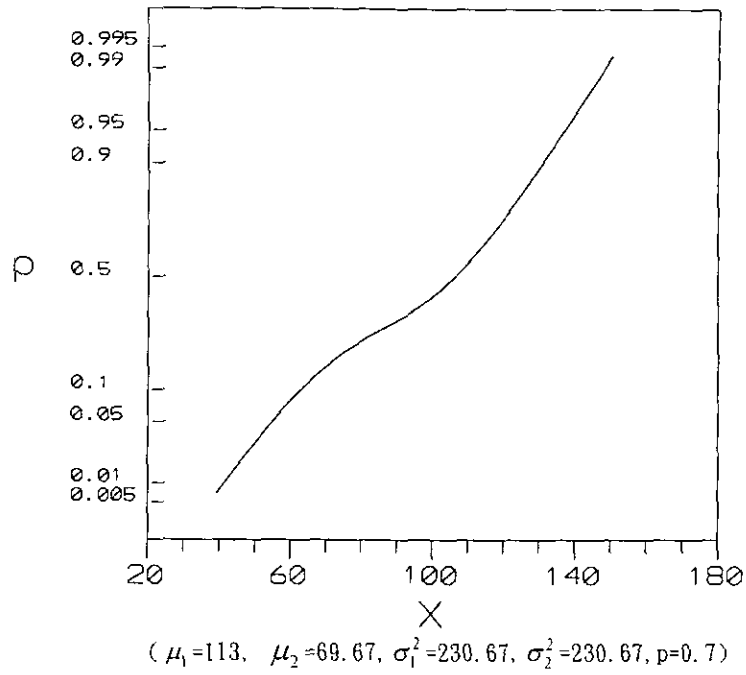


圖 1 混合常態分布繪於常態機率紙( $\mu_1 \neq \mu_2, \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ )

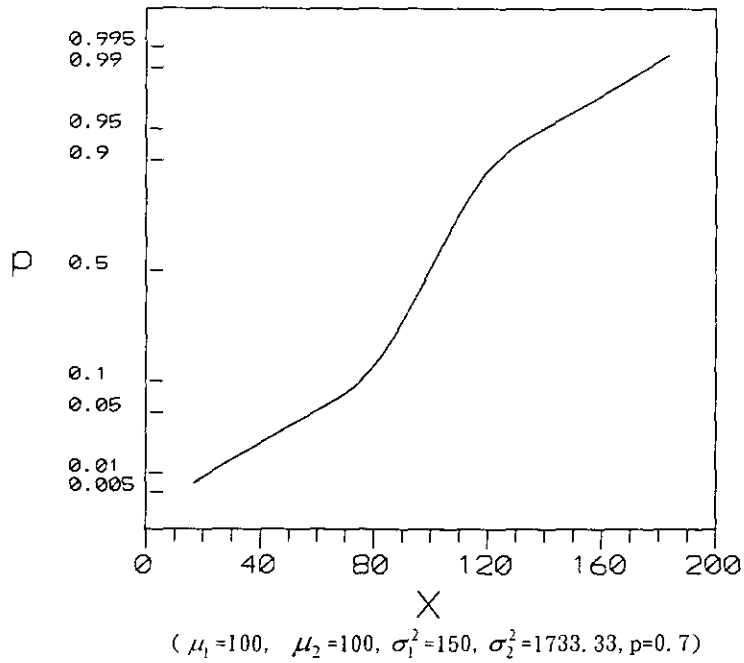


圖 2 混合常態分布繪於常態機率紙( $\mu_1 = \mu_2, \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ )

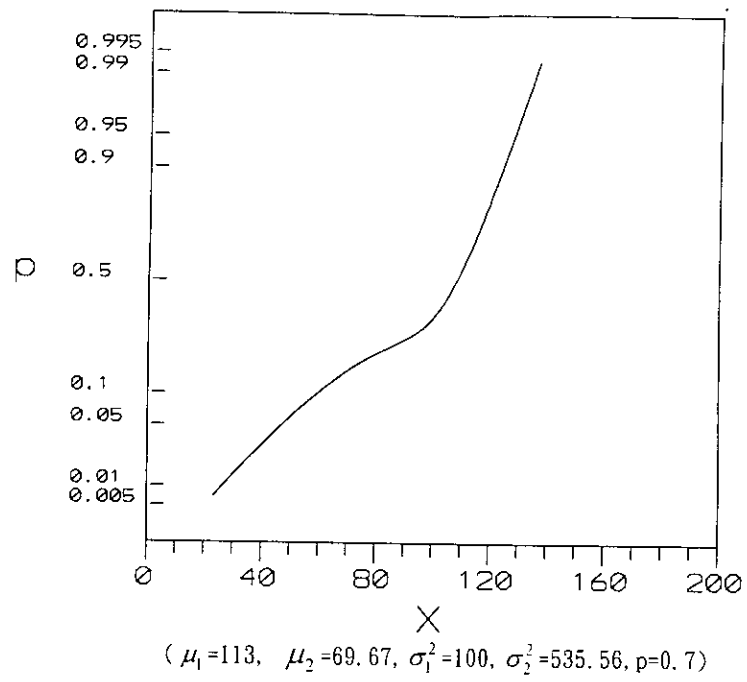


圖 3 混合常態分布繪於常態機率紙( $\mu_1 \neq \mu_2, \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ )

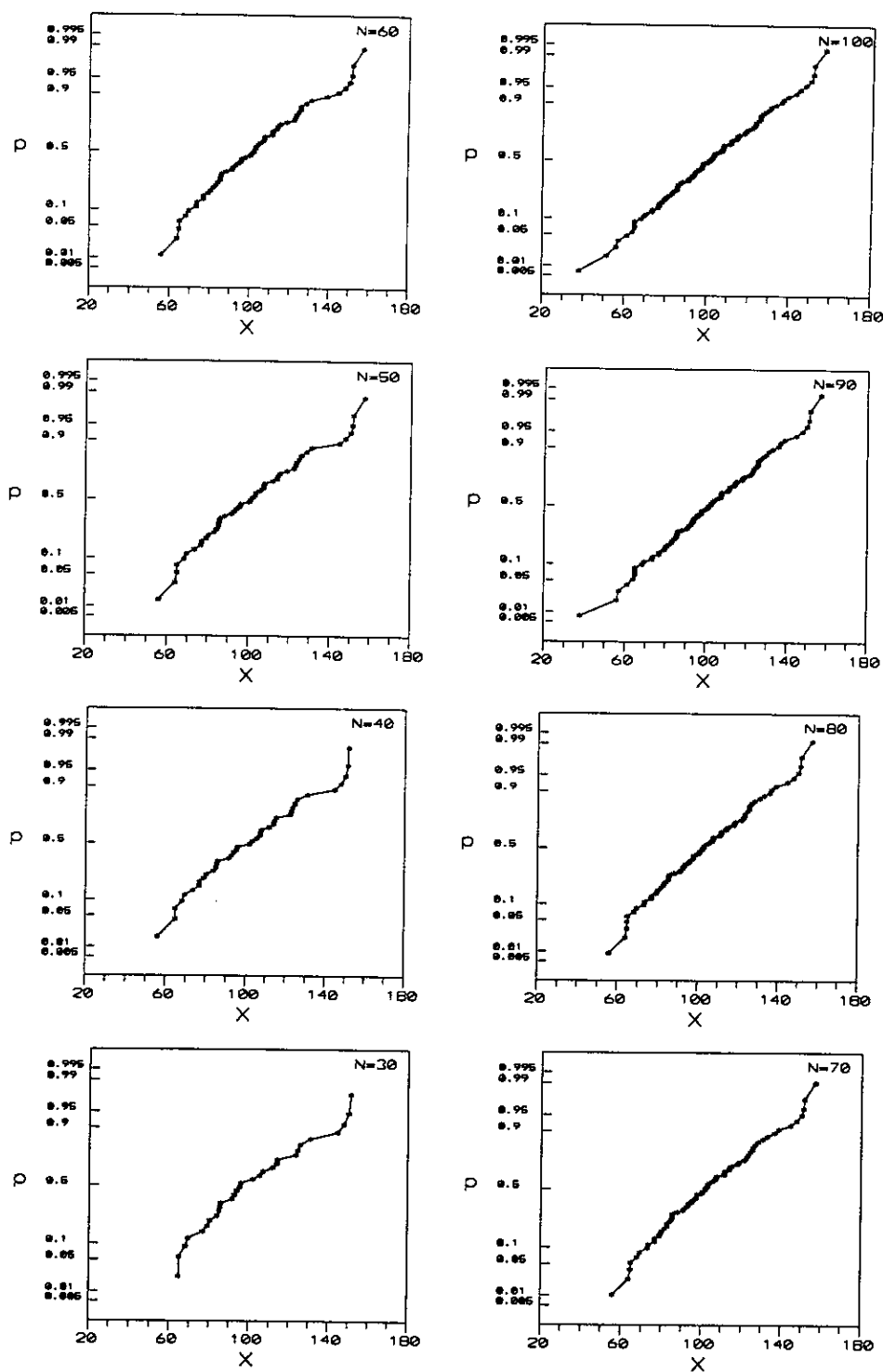


圖 4 常態分布資料樣本大小由 30 至 100 分別點繪於常態機率紙之變化圖

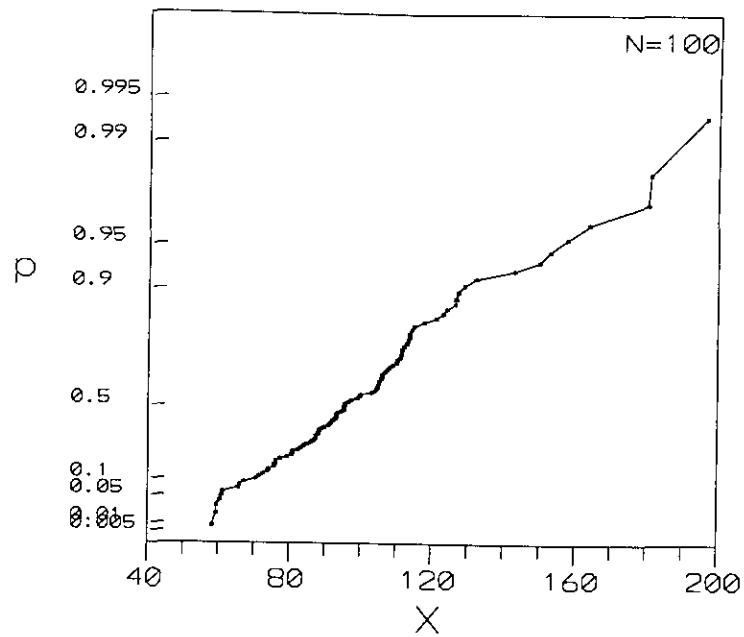


圖 5 極端值 I 型分布資料點繪於甘保機率紙

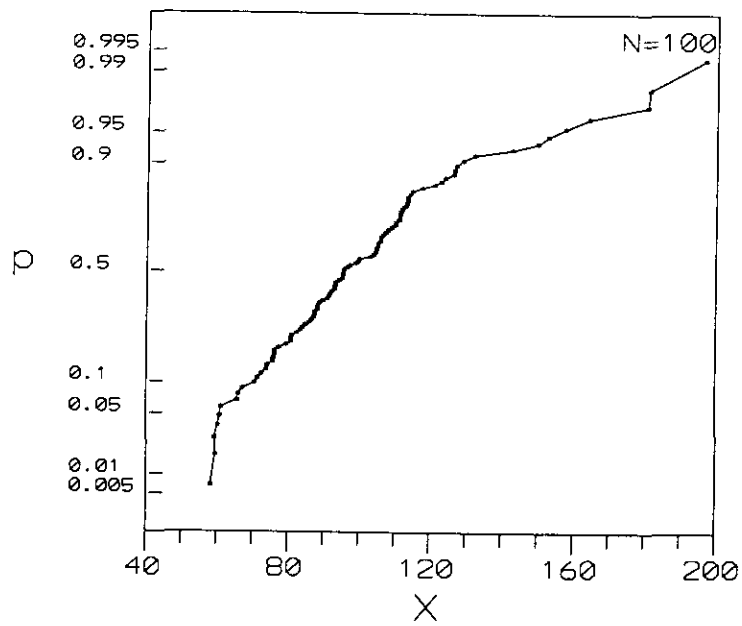


圖 6 極端值 I 型分布資料點繪於常態機率紙

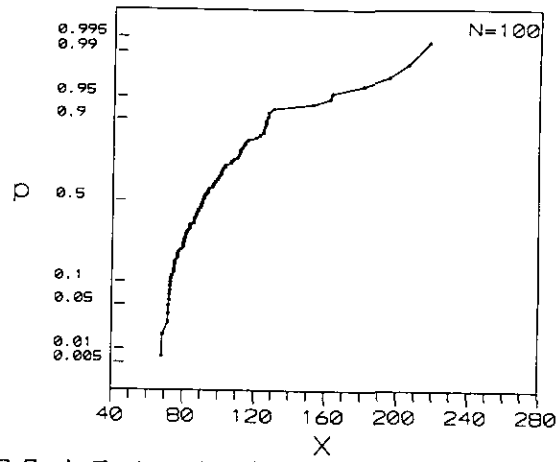


圖 7 皮爾遜III型分布資料點繪於常態機率紙

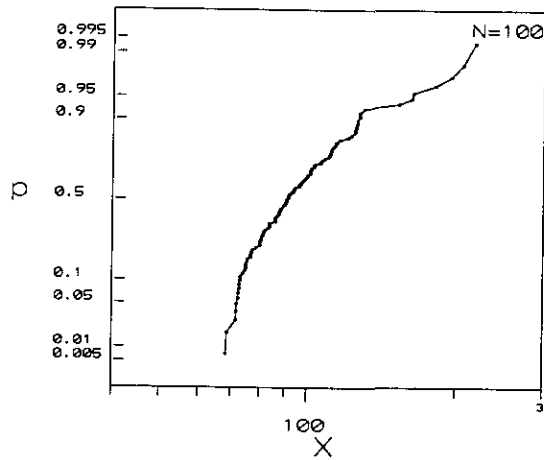


圖 8 皮爾遜III型分布資料點繪於對數常態機率紙

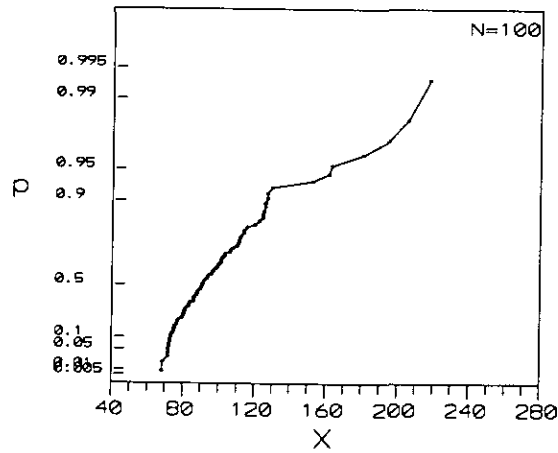


圖 9 皮爾遜III型分布資料點繪於甘保機率紙

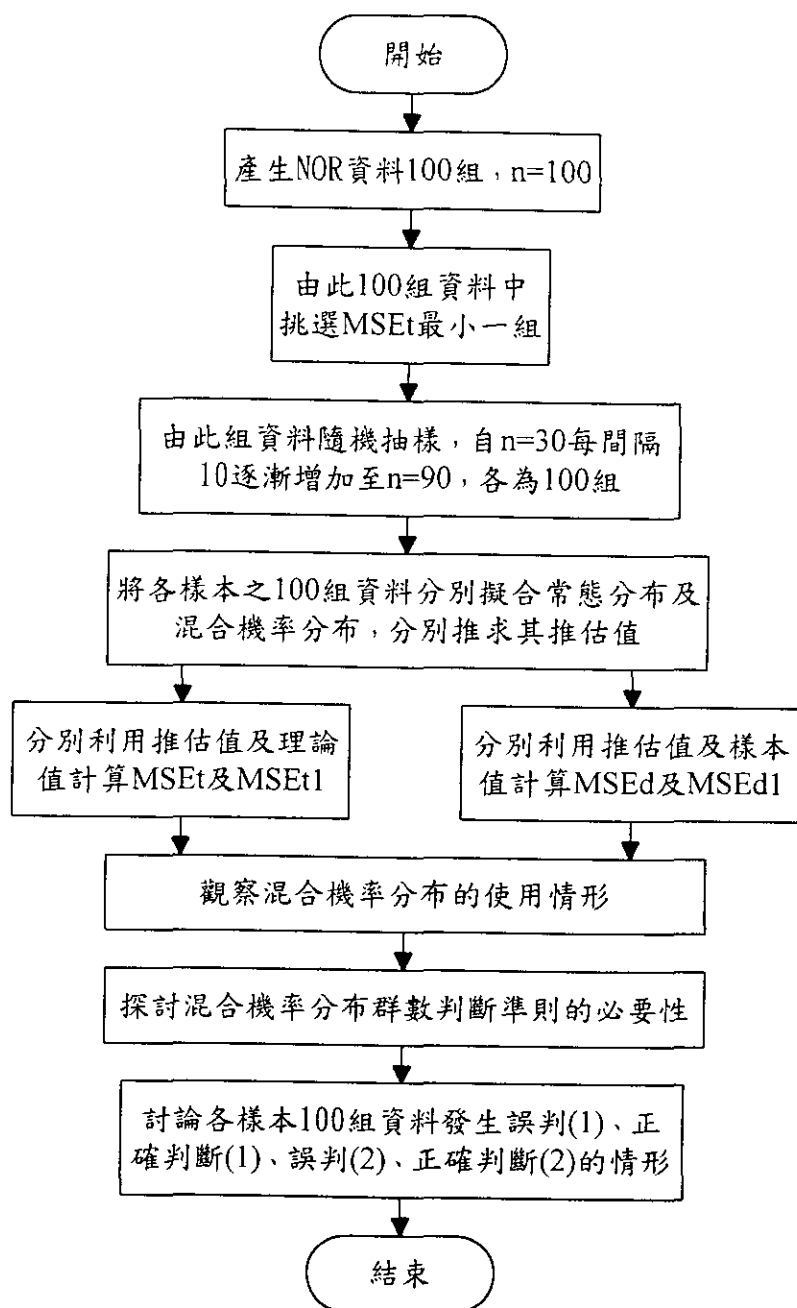


圖 10 分析合成資料之流程圖 (以常態分布為例)

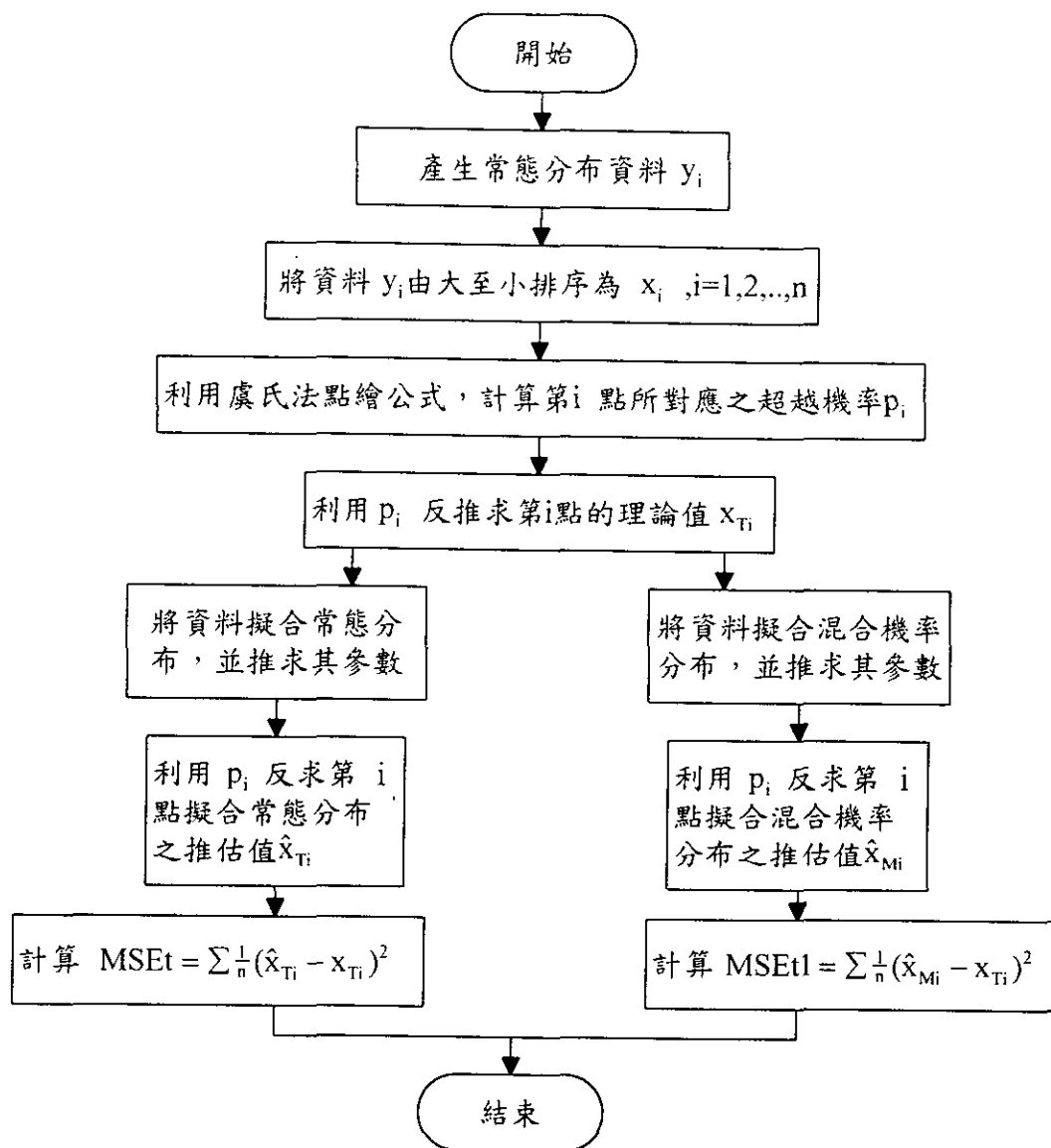


圖 11 以常態分布為例之 MSEt 及 MSEt1 演算流程圖



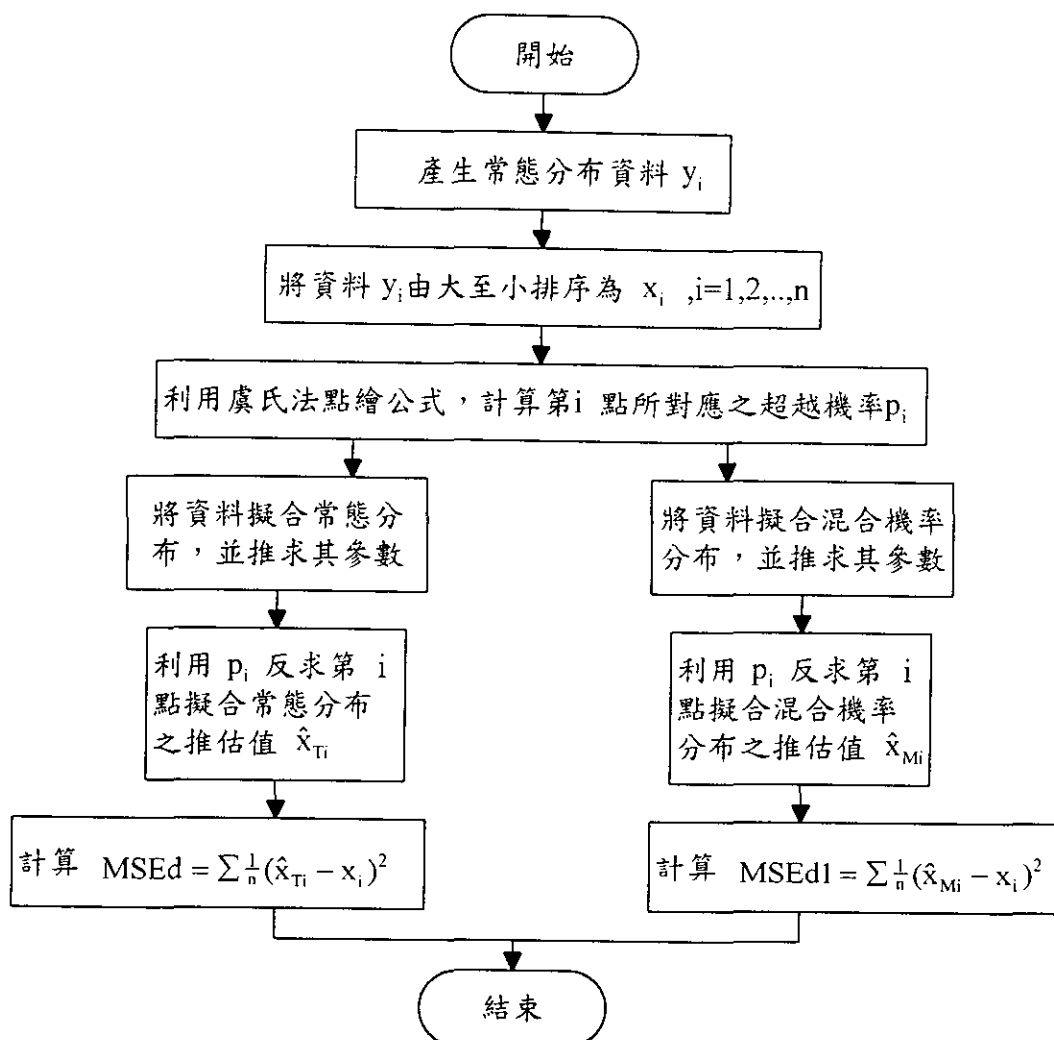


圖 12 以常態分布為例之 MSEd 及 MSEd1 演算流程圖

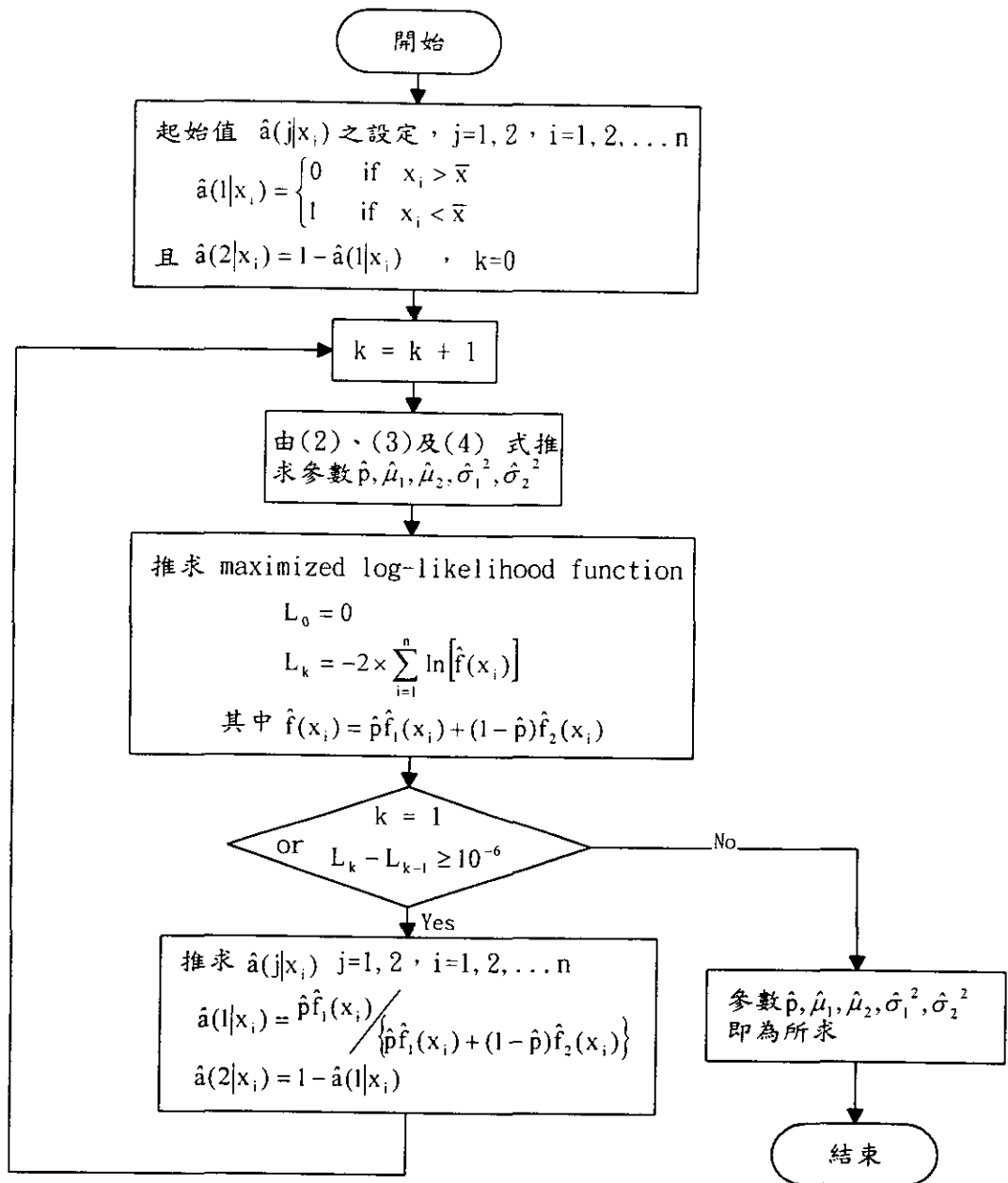


圖 13 參數推估之流程圖 (以 case1 為例)

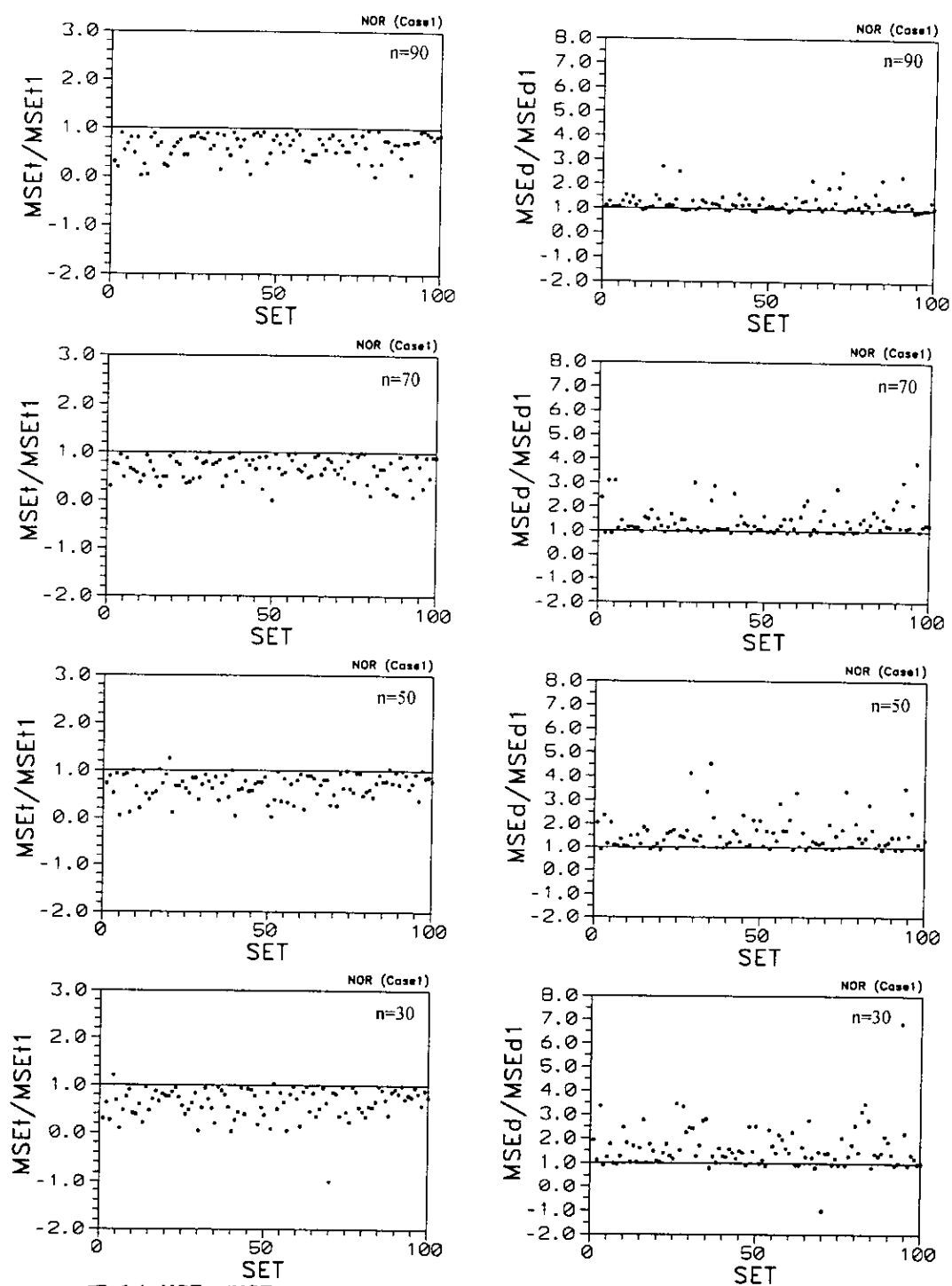


圖 14  $MSE_t/MSE_{t1}$ 、 $MSE_d/MSE_{d1}$  分佈圖(理論分布：常態分布，case1)

註：擬合分布為常態分布及混合常態分布

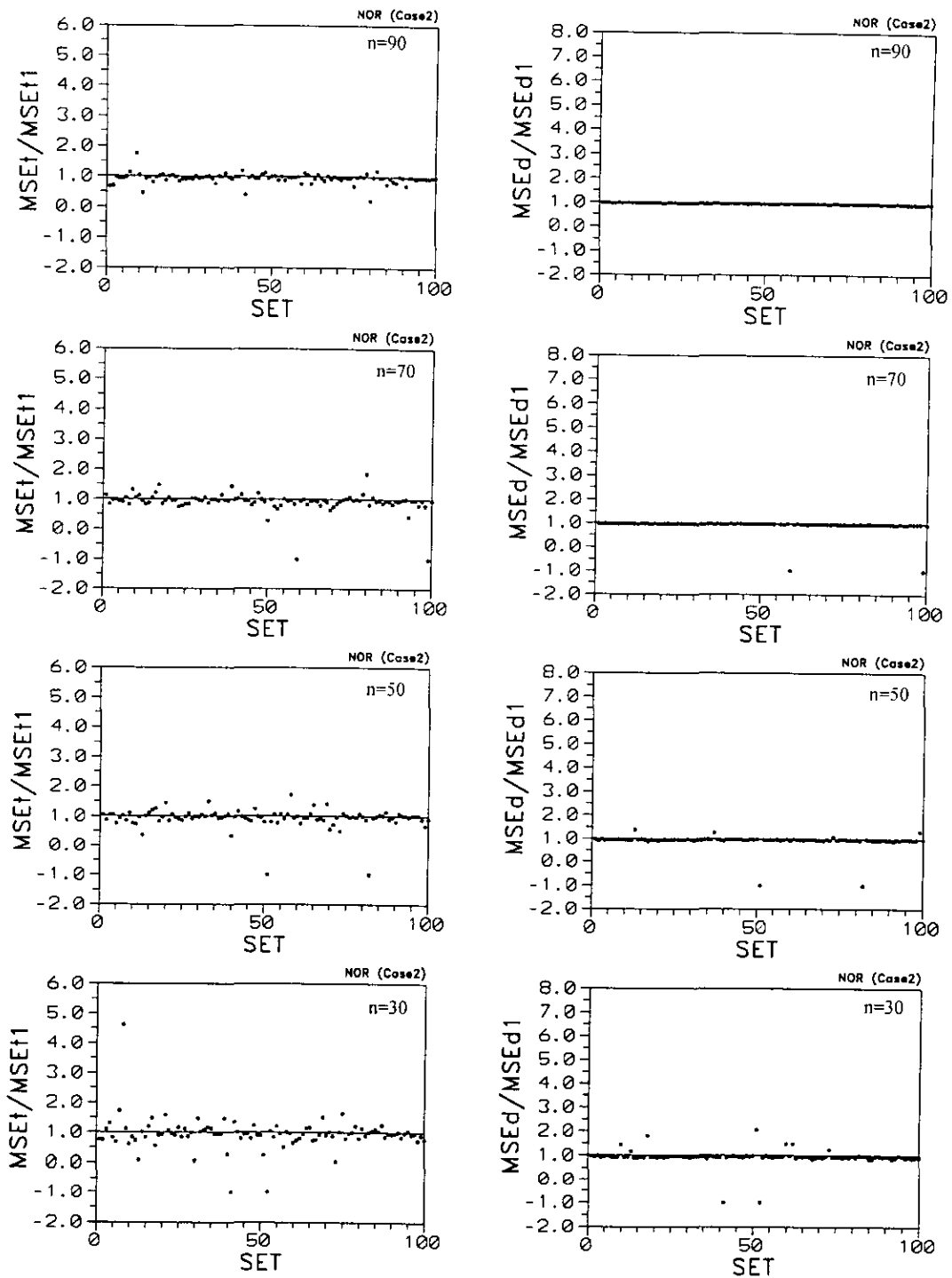


圖 15  $MSEt/MSEt1$ 、 $MSEd/MSEd1$  分佈圖 (理論分布：常態分布，case2)

註：擬合分布為常態分布及混合常態分布

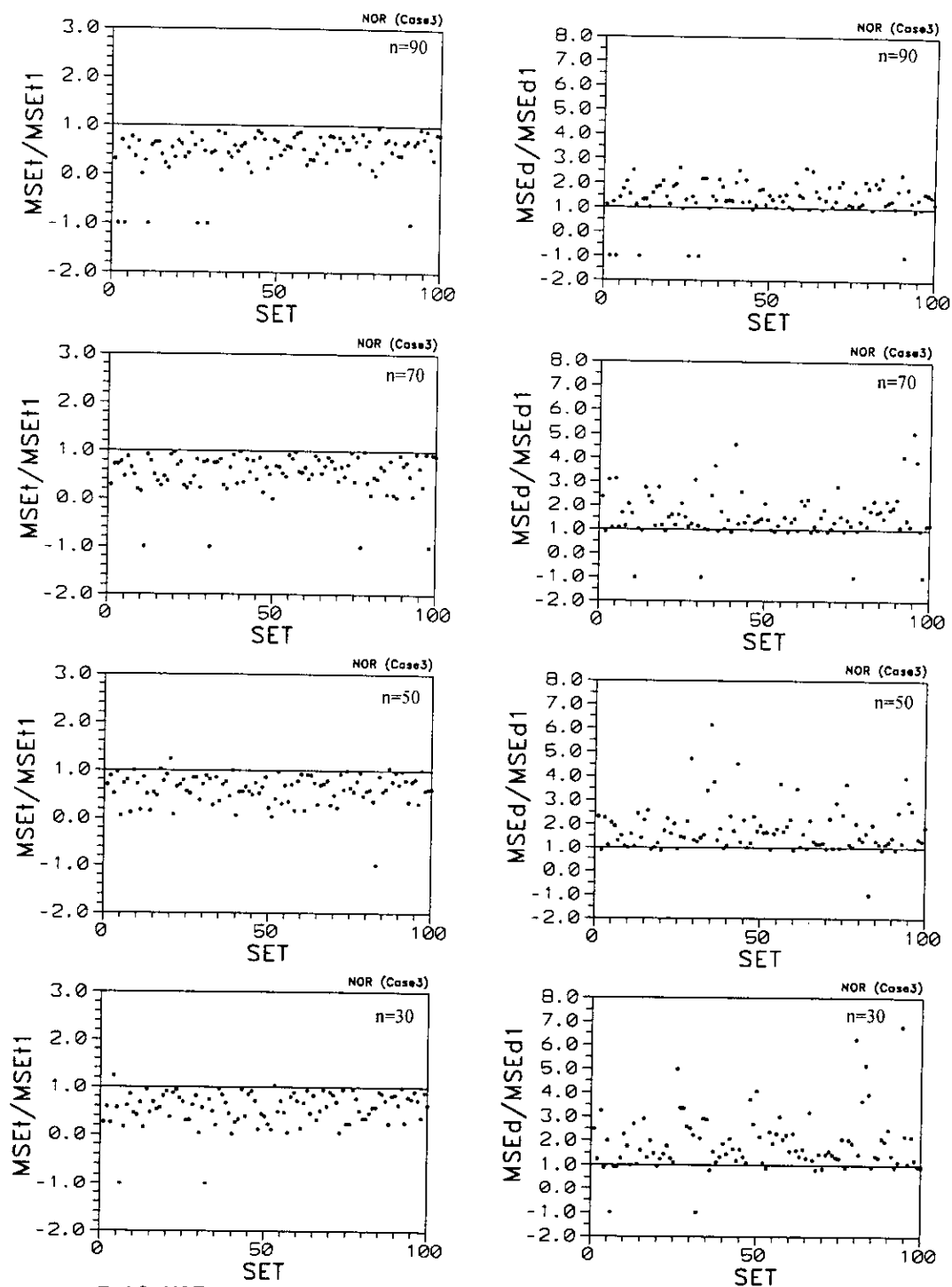
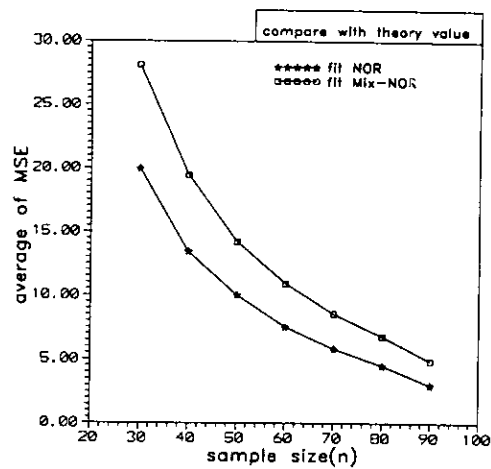
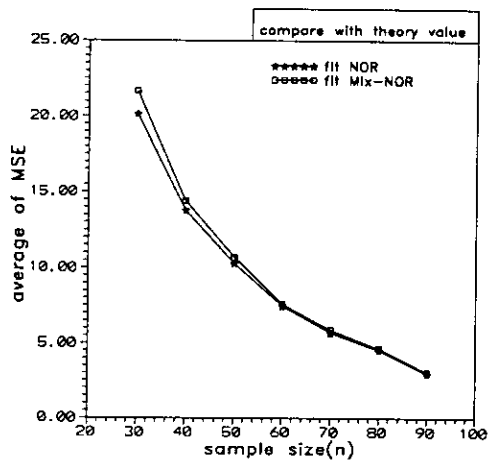
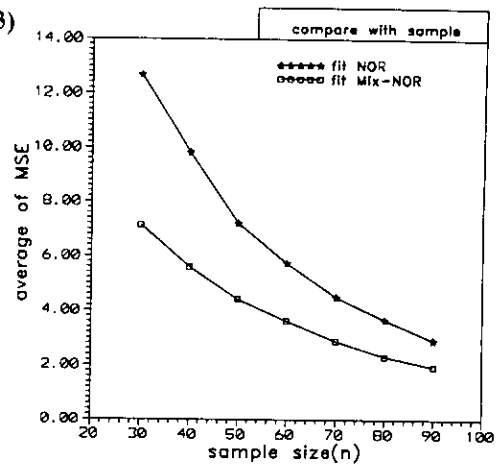


圖 16  $MSE_t/MSE_{t1}$ 、 $MSE_d/MSE_{d1}$  分佈圖(理論分布：常態分布，case3)

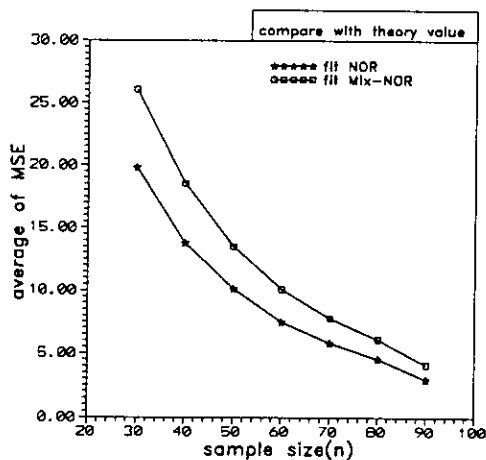
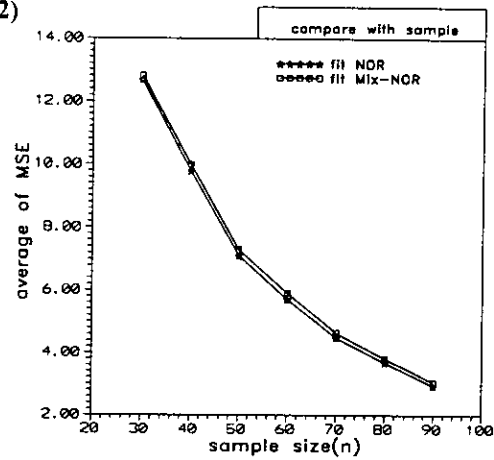
註：擬合分布為常態分布及混合常態分布



(case3)



(case2)



(case1)

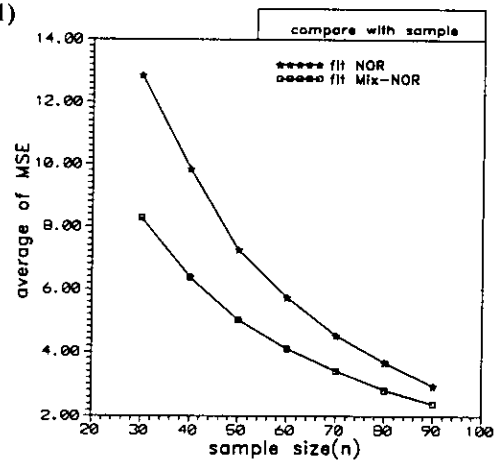


圖 17 常態分布資料分別以混合機率分布(case1、case2、case3)及常態分布擬合後與理論值及樣本相較之 100 組 MSE 平均值

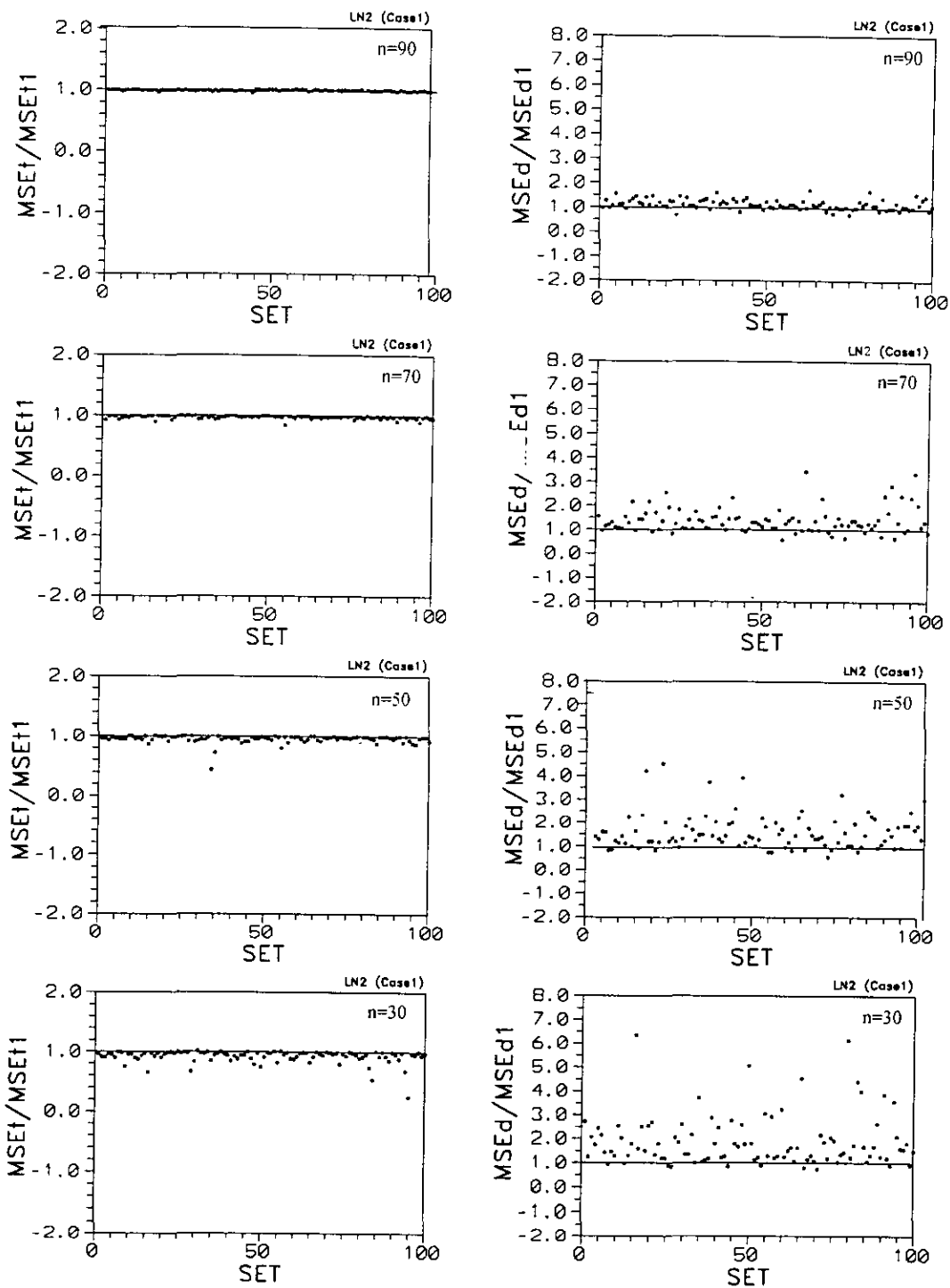


圖 18 MSET/MSET1、MSED/MSED1 分佈圖(理論分布：對數常態分布，case1)

註：擬合分布為對數常態分布及混合常態分布

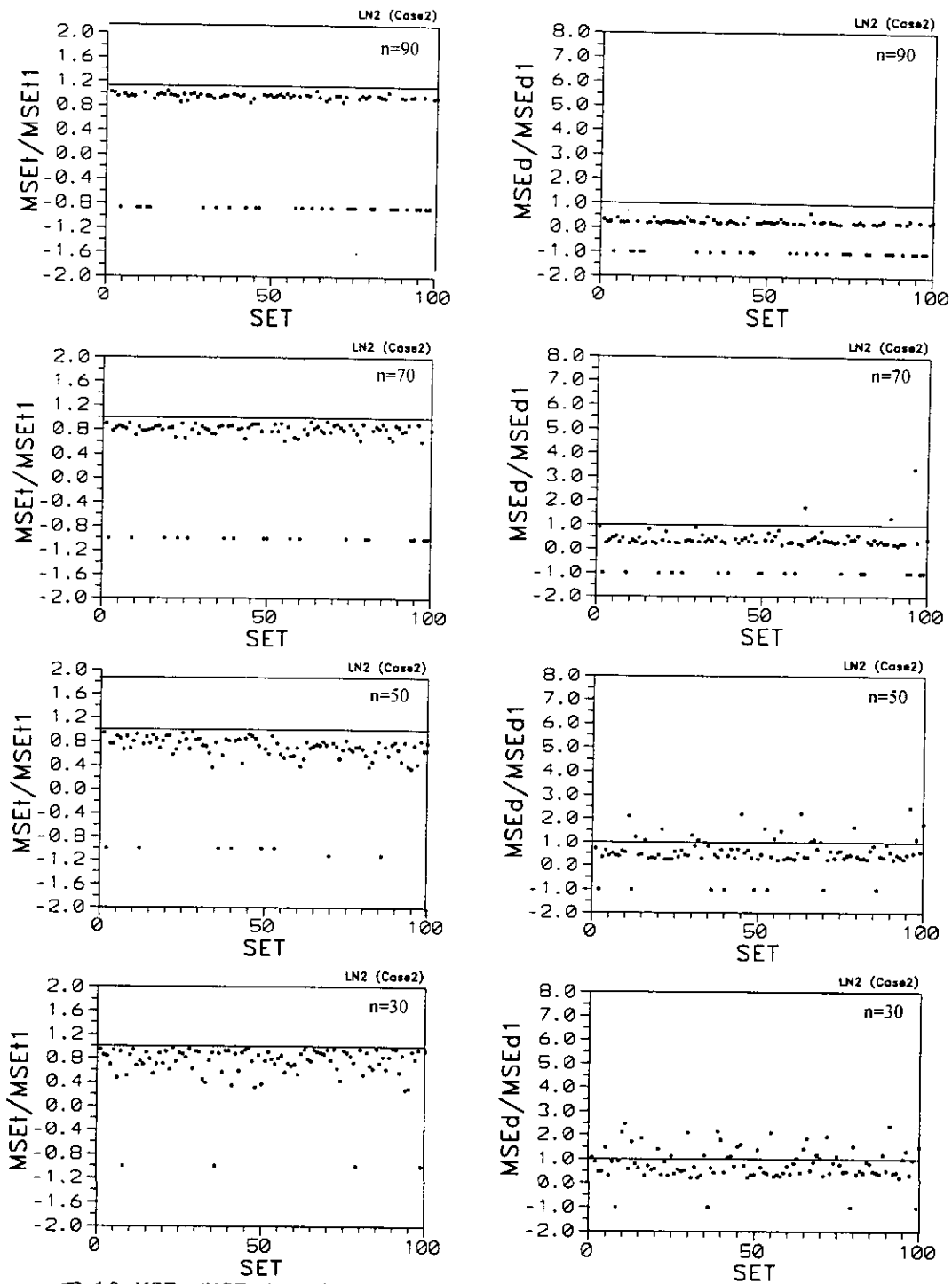


圖 19  $MSE_t/MSE_{t1}$ 、 $MSE_d/MSE_{d1}$  分佈圖(理論分布：對數常態分布，case2)

註：擬合分布為對數常態分布及混合常態分布



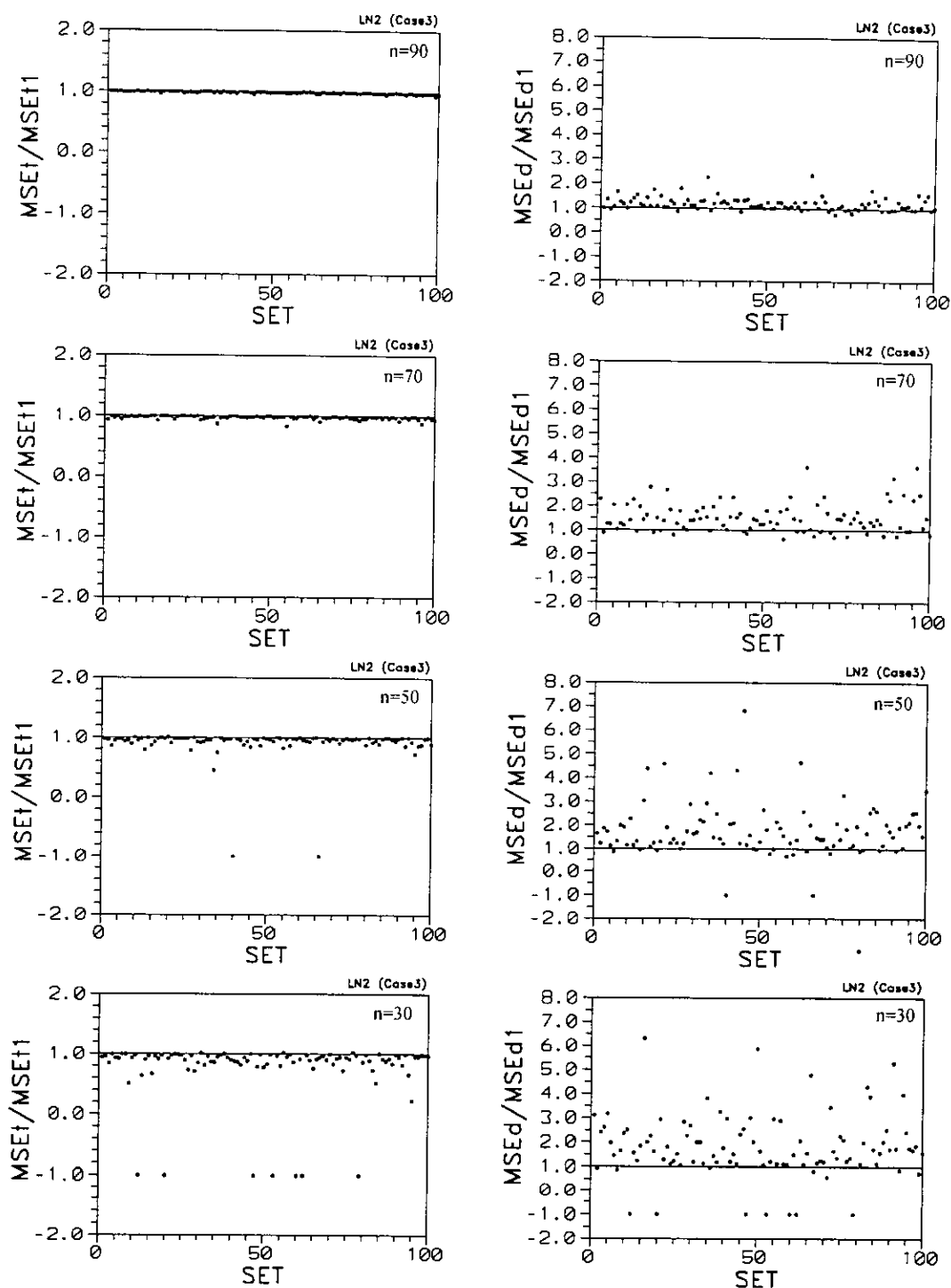


圖 20  $MSE_t/MSE_{t1}$ 、 $MSE_d/MSE_{d1}$  分佈圖(理論分布：對數常態分布，case3)

註：擬合分布為對數常態分布及混合常態分布

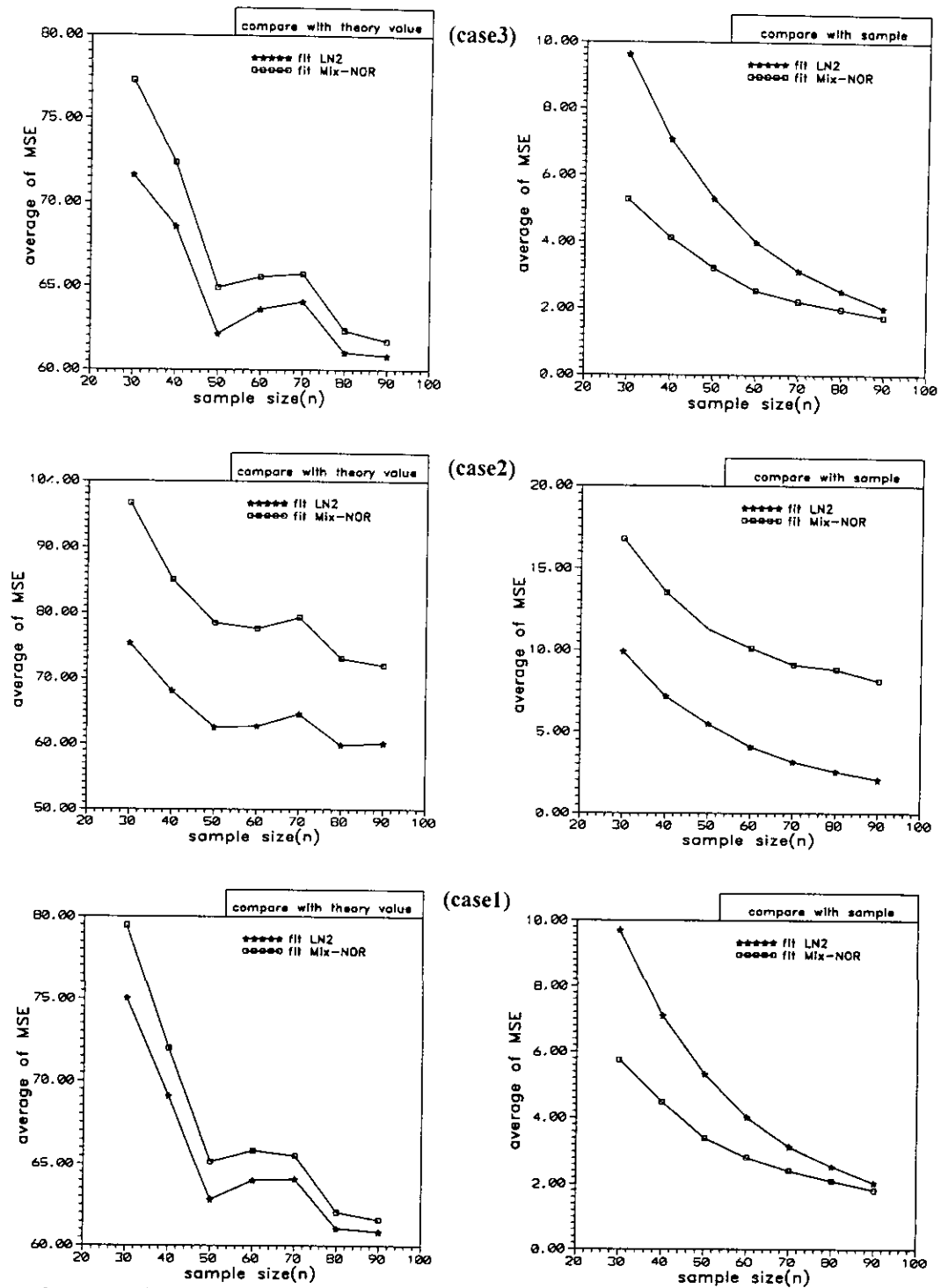


圖 21 對數常態分布資料分別以混合機率分布(case1、case2、case3)及對數常態分布擬合後與理論值及樣本相較之 100 組 MSE 平均值

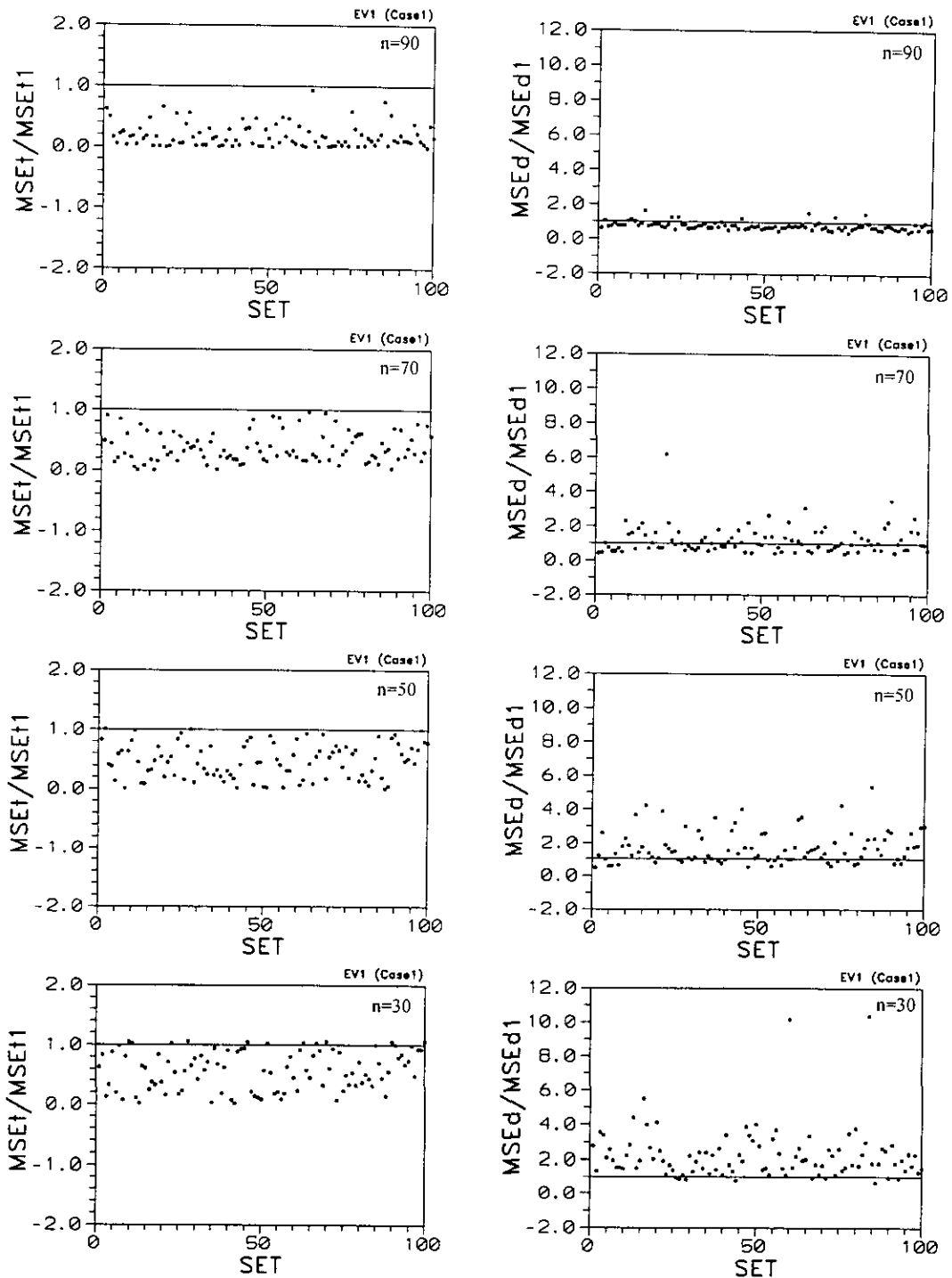


圖 22  $MSET/MSET1$ 、 $MSED/MSED1$  分佈圖(理論分布：極端值 I 型分布，case1)

註：擬合分布為極端值 I 型分布及混合常態分布

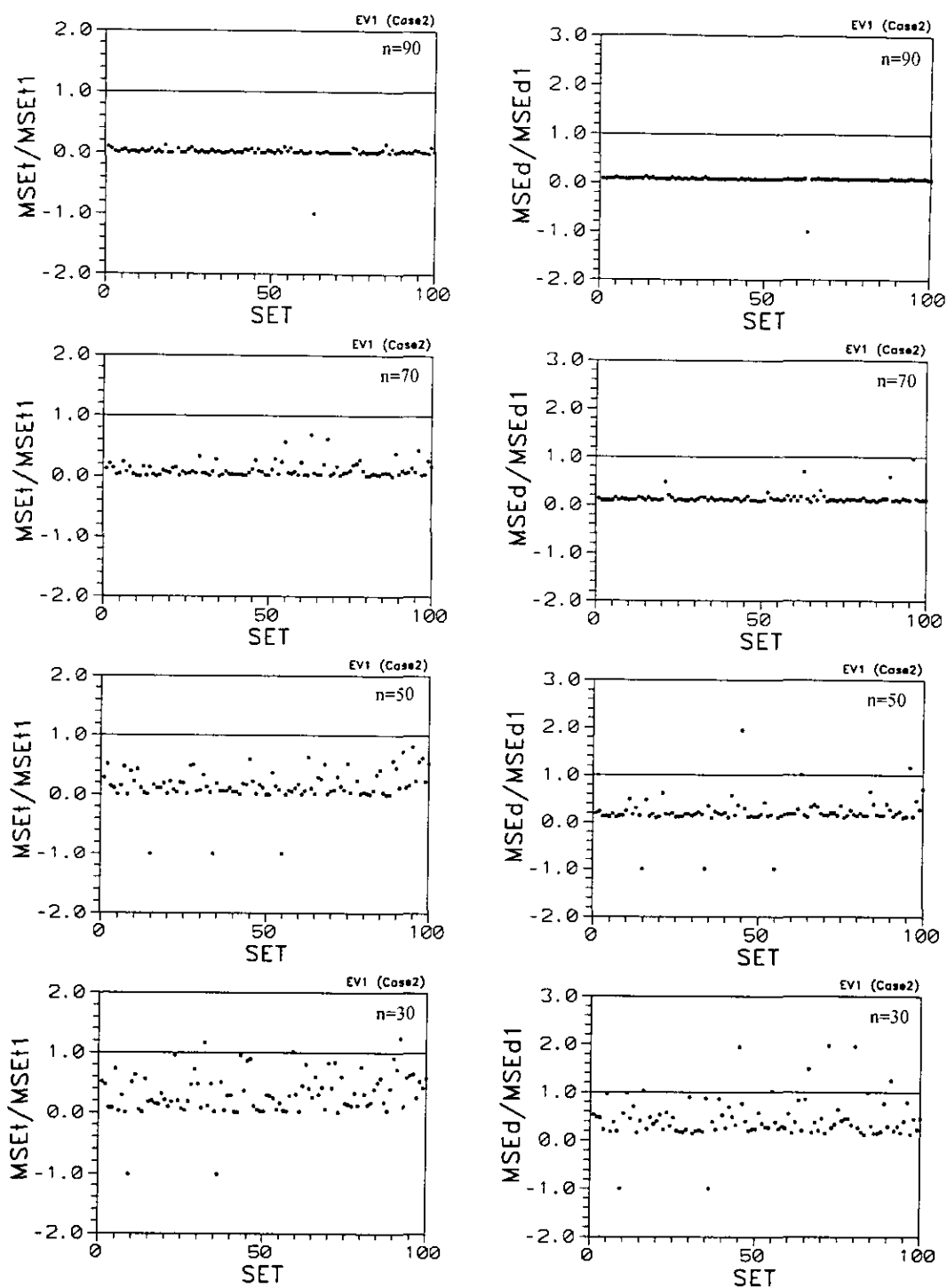


圖 23  $MSE_t/MSE_{t1}$ 、 $MSE_d/MSE_{d1}$  分佈圖(理論分布：極端值 I 型分布，case2)

註：擬合分布為極端值 I 型分布及混合常態分布

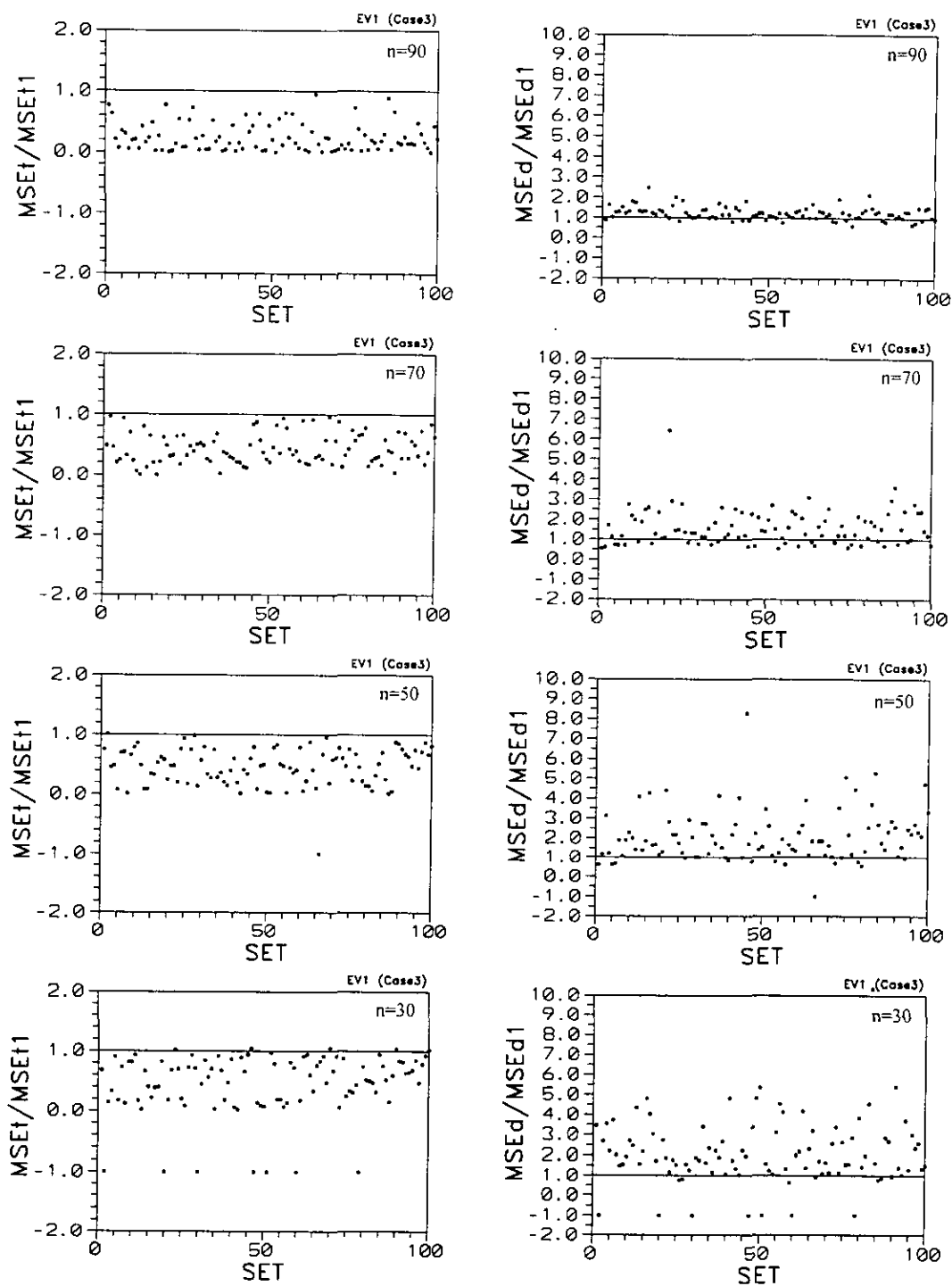


圖 24  $MSE_t/MSE_{t1}$ 、 $MSE_d/MSE_{d1}$  分佈圖(理論分布：極端值 I 型分布，case3)

註：擬合分布為極端值 I 型分布及混合常態分布

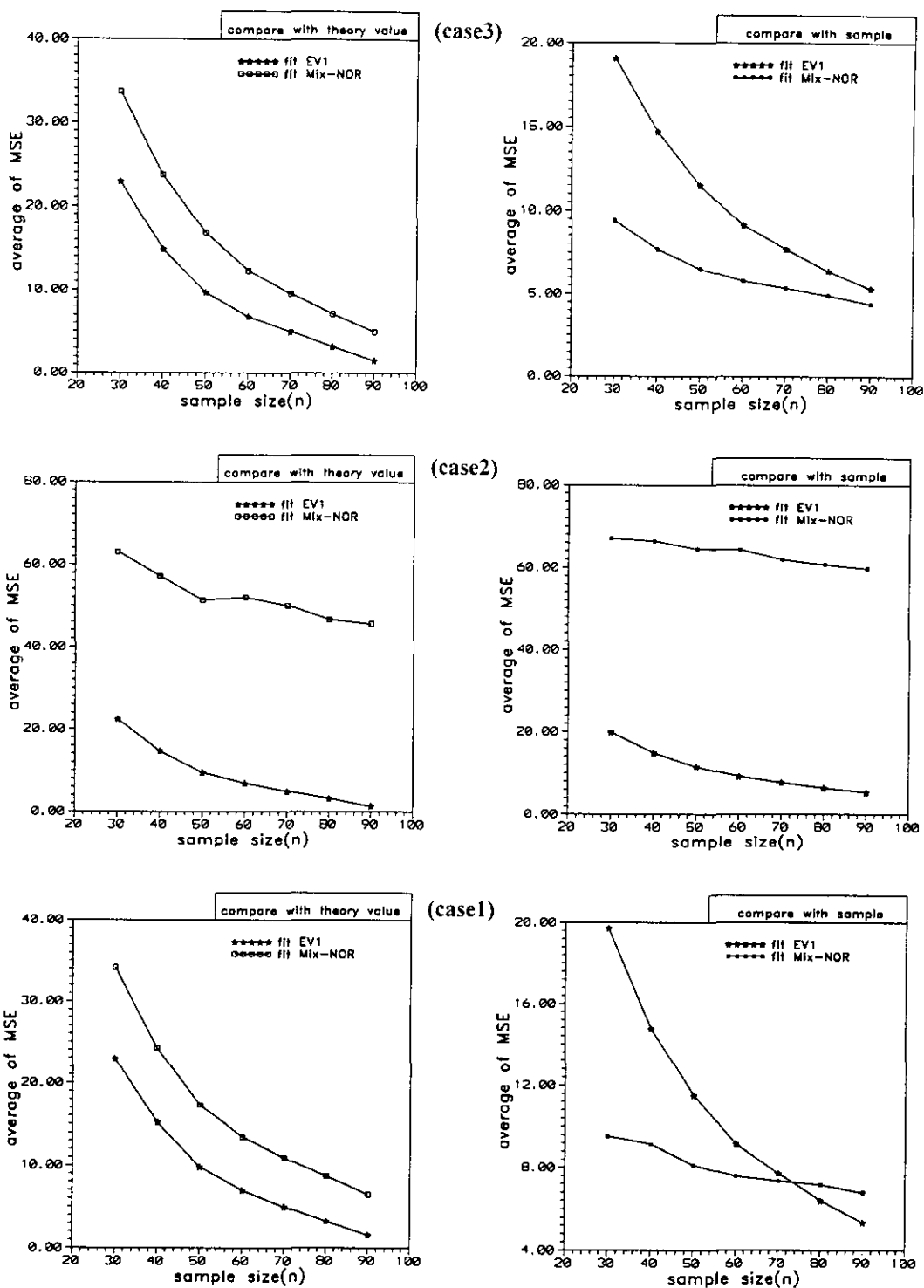


圖 25 極端值 I 型分布資料分別以混合機率分布(case1、case2、case3)及極端值 I 型分布擬合後與理論值及樣本相較之 100 組 MSE 平均值

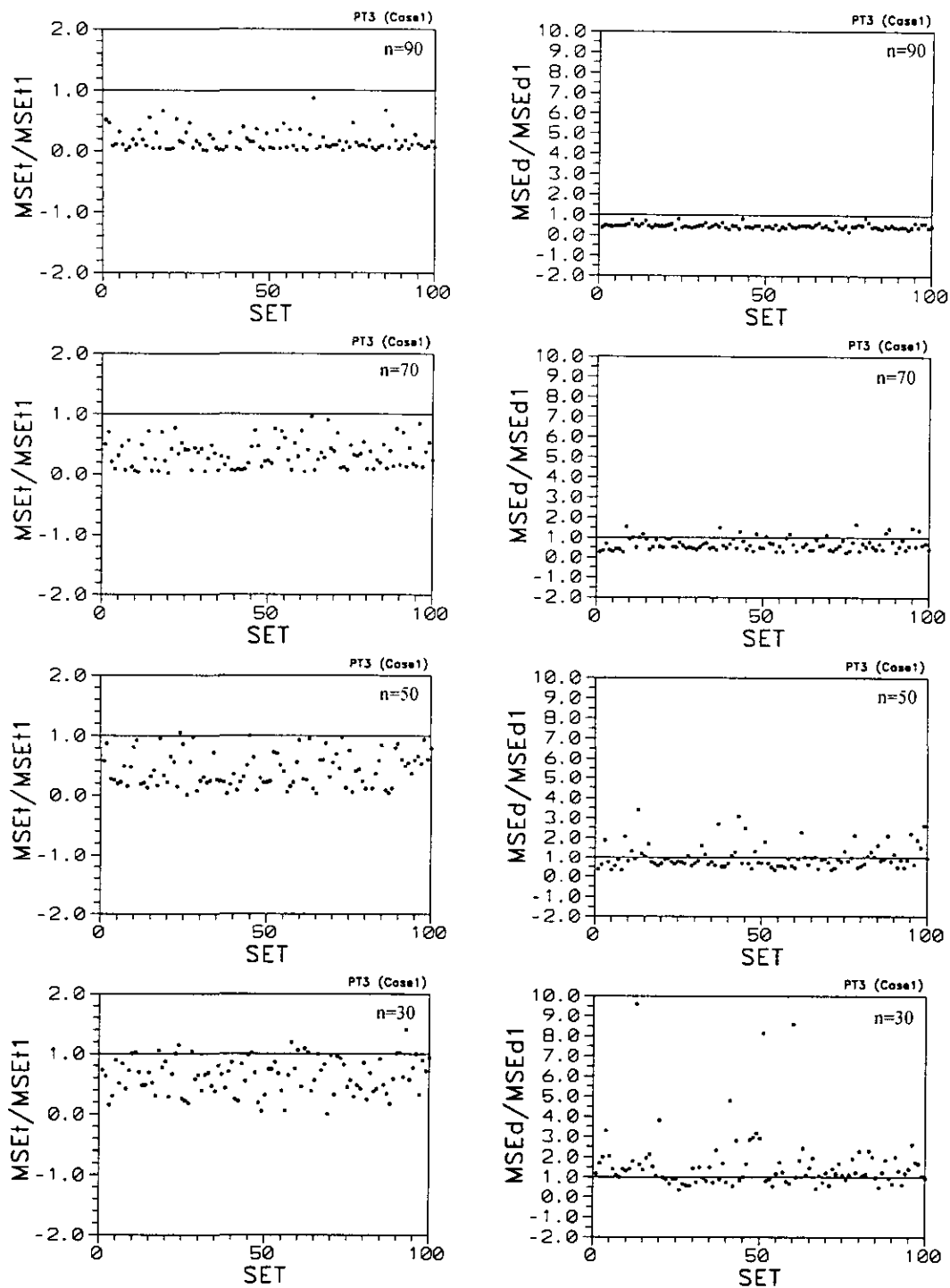


圖 26  $MSE_t/MSE_{t1}$ 、 $MSE_d/MSE_{d1}$  分佈圖(理論分布：皮爾遜III型分布，case1)

註：擬合分布為皮爾遜III型分布及混合常態分布

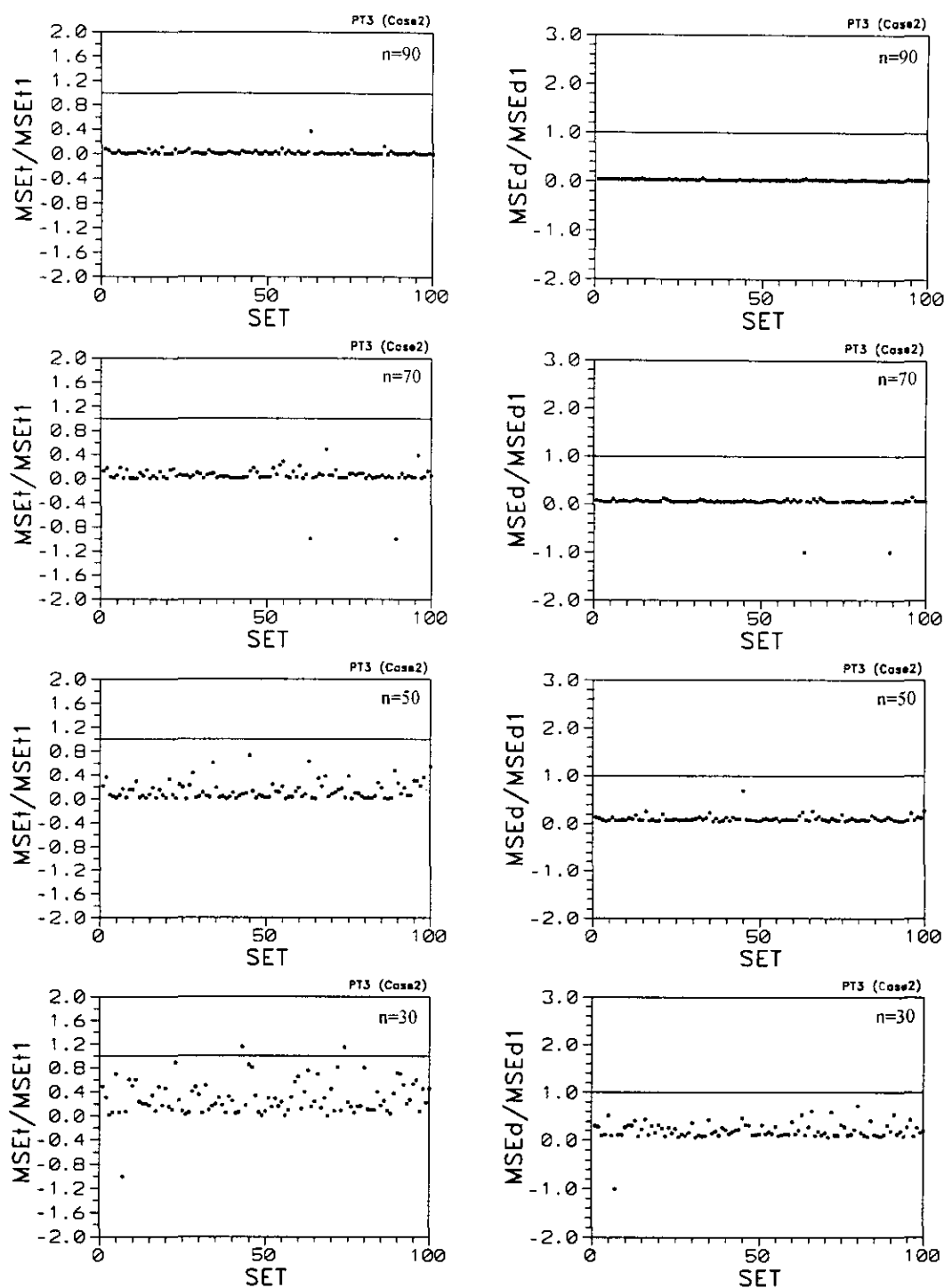


圖 27  $MSE_t/MSE_{t1}$ 、 $MSE_d/MSE_{d1}$  分佈圖(理論分布：皮爾遜III型分布，case2)

註：擬合分布為皮爾遜III型分布及混合常態分布



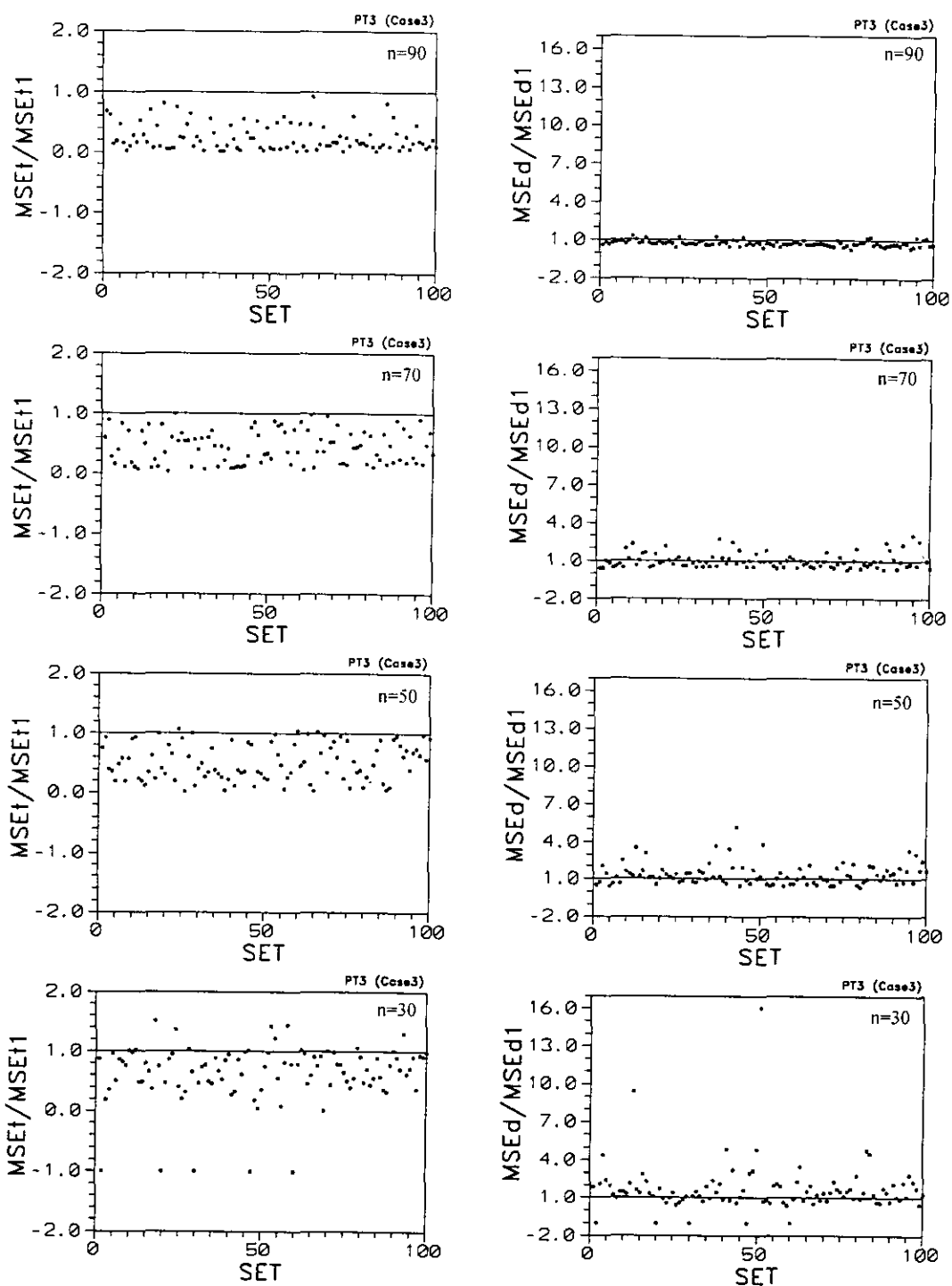


圖 28  $MSE_t/MSE_{t1}$ 、 $MSE_d/MSE_{d1}$  分佈圖(理論分布：皮爾遜III型分布，case3)

註：擬合分布為皮爾遜III型分布及混合常態分布

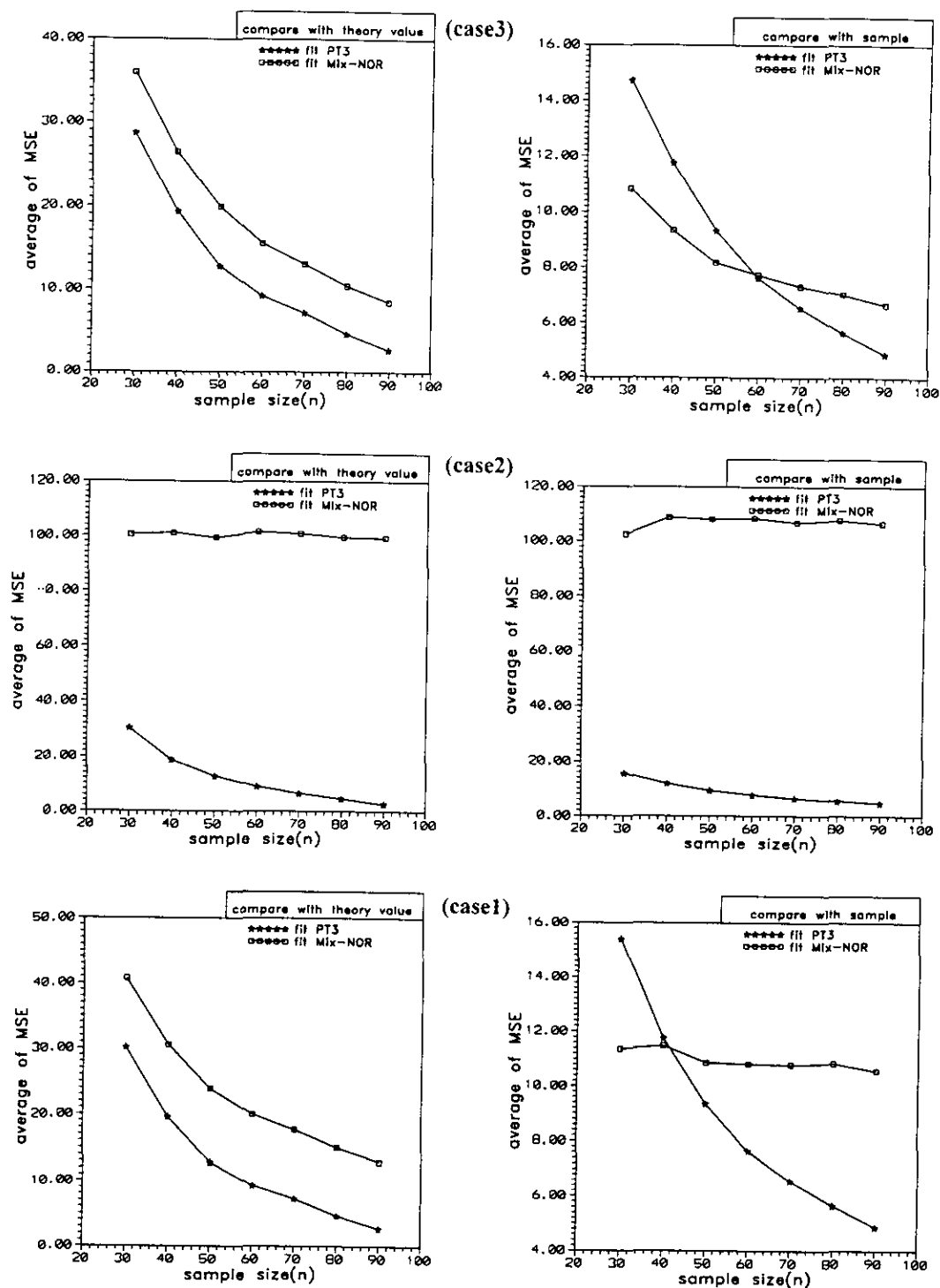


圖 29 皮爾遜Ⅲ型分布資料分別以混合機率分布(case1、case2、case3)及皮爾遜Ⅲ型分布擬合後與理論值及樣本相較之 100 組 MSE 平均值